UN'ANALISI PROBABILISTICA DEL RAPPORTO MANCE/INCASSI NEL GIOCO DELLA ROULETTE FRANCESE.

PIETRO MULIERE
PIERCESARE SECCHI

CR 39 (7-93)

Un'analisi probabilistica del rapporto Mance/Incassi nel gioco della Roulette Francese

Pietro Muliere Piercesare Secchi

Dipartimento di Economia Politica e Metodi Quantitativi
Università degli Studi di Pavia

1 Introduzione

Il valore del rapporto Mance/Incassi relativo al gioco della Roulette Francese ha di recente suscitato un vivace dibattito condotto sia sulle pagine dei quotidiani che nelle aule giudiziarie. Allo studio di questo valore sono ovviamente interessate le proprietà delle case da gioco e le organizzazioni sindacali competenti. In questa nota ci proponiamo di analizzare da un punto di vista strettamente probabilistico il comportamento del rapporto Mance/Incassi. Questa quantità è evidentemente una variabile aleatoria la cui legge di distribuzione dipende da quella di numerosi altri elementi aleatori; con questo lavoro vogliamo individuare quelli che la influenzano maggiormente. L'analisi che condurremo ha un duplice scopo: da una parte quello di fornire alcuni valori di riferimento per il rapporto Mance/Incassi e dall'altra quello di individuare le quantità aleatorie le cui determinazioni dovranno essere prese in esame in una eventuale indagine statistica che miri alla sua stima.

In particolare, nella prima parte del lavoro affronteremo il problema della determinazione dei valori asintotici del rapporto Mance/Incassi, ovvero dei valori che tale rapporto assume quando il numero di pezzi giocati diventa molto grande. Mostreremo come tali valori dipendono non solo dai meccanismi aleatori che discendono dalle regole del gioco della Roulette, ma anche dal comportamento dei giocatori e più in particolare dal modo in cui questi decidono di attribuire le mance e distribuiscono le puntate sul tavolo. Nella seconda parte del lavoro condurremo invece uno studio preliminare inerente alla variabilità del fenomeno in esame; a questo fine la legge di distribuzione del rapporto Mance/Incassi verrà calcolata per mezzo del metodo di simulazione di Monte Carlo.

2 Sul valore asintotico del rapporto Mance/Incassi

Da un punto di vista probabilistico i giochi distinti che possono essere effettuati alla Roulette Francese sono sette. Nel seguito ci riferiremo ad essi secondo la seguente numerazione:

1. Pieno; il giocatore punta una somma su un numero, che, se esce, gli fa vincere 35 volte la somma puntata.

2. Cavalli; il giocatore punta una somma a cavallo su due numeri. Se uno dei due numeri esce, il giocatore vince 17 volte la somma puntata.

3. Terzina; il giocatore punta una somma su una trasversale di tre numeri. Se uno dei tre numeri esce, il giocatore vince 11 volte la somma puntata.

4. Carrè; il giocatore punta una somma all'incrocio di quattro numeri. Se uno dei quattro numeri esce, il giocatore vince 8 volte la somma puntata.

5. Sestina; il giocatore punta una somma su una trasversale di sei numeri. Se uno dei sei numeri esce, il giocatore vince 5 volte la somma puntata.

6. Dozzina o Colonna; il gioco Dozzina e quello Colonna, pur essendo distinti sul tavolo da gioco, sono equivalenti da un punto di vista probabilistico. Nel caso del gioco Dozzina il giocatore punta una somma su una delle tre dozzine segnate sul tavolo da gioco, mentre nel caso del gioco Colonna, punta una somma su una delle tre colonne. Se esce uno dei numeri della dozzina prescelta, oppure uno dei numeri della colonna, il giocatore vince 2 volte la somma puntata.

7. Chances. Tre sono i giochi di Chanches: Pari-Dispari, Passe-Manque, Rosso-Nero. Essi sono tutti equivalenti da un punto di vista probabilistico. Il giocatore punta una somma su una chanche; se questa esce, il giocatore vince 1 volta la somma puntata.

Osservazione. Quando esce lo 0 le Colonne e le Dozzine perdono come le altre puntate che non siano sullo 0 o sulle combinazioni dello 0, mentre le Chanches vengono imprigionate e rimesse in gioco, se vincenti, al colpo successivo. Nell'eventualità di un secondo 0 le puntate già imprigionate una volta vengono imprigionate una seconda volta. Per essere libere la Chance deve vincere due volte di seguito. Se escono ancora degli zeri la procedura è sempre la stessa. Nel seguito, per semplicità, assumeremo che siano al più possibili due imprigionamenti. ◇

In questa sezione valuteremo il valore del rapporto Mance/Incassi quando il numero di pezzi giocati in modo indipendente in ogni singolo gioco è molto grande, ovvero analizzeremo il suo *valore asintotico*. L'analisi verrà condotta dapprima separatamente per ogni gioco e quindi globalmente.

Prima di procedere è opportuno introdurre la notazione che verrà usata nelle pagine seguenti. Supporremo che nel gioco i-esimo, $(i = 1, 2, \ldots, 7)$, vengano giocati in modo indipendente N_i pezzi, ognuno di valore s. V_i sarà il numero di pezzi vinti dal banco nel gioco i-esimo e p_i indicherà la probabilità che il banco ha di vincere un pezzo nel gioco i-esimo. Quindi, in base alle regole del gioco più sopra ricordate, si avrà che:

$$p_1 = \frac{36}{37},\ p_2 = \frac{35}{37},\ p_3 = \frac{34}{37},\ p_4 = \frac{33}{37},\ p_5 = \frac{31}{37},\ p_6 = \frac{25}{37},\ p_7 = 0.507.$$

Il valore della probabilità p_7 discende dall'avere assunto che siano al più possibili due imprigionamenti. Nel gioco i-esimo, per ogni pezzo giocato e vincente, il giocatore riceve dal

banco, oltre al pezzo giocato, c_i pezzi. Si avrà quindi,

$$c_1 = 35,\ c_2 = 17,\ c_3 = 11,\ c_4 = 8,\ c_5 = 5,\ c_6 = 2, c_7 = 1.$$

Con m_i indicheremo la mancia lasciata dal giocatore per ogni suo pezzo vincente nel gioco i-esimo. La quantità m_i è scelta in modo apparentemente arbitrario dal giocatore. Tuttavia la tradizione del gioco della roulette vuole che il giocatore paghi le mance secondo alcune regole che sono, in buona sostanza, fissate; è ben noto, per esempio, che è quasi un obbligo del giocatore pagare un pezzo di mancia per ogni pezzo vincente sul gioco del Pieno. Nel seguito considereremo diverse regole delle mance, che hanno tuttavia sempre in comune quella or ora descritta relativamente al gioco del Pieno. Infine con I_i indicheremo il totale degli incassi del banco relativi al gioco i-esimo e con M_i il totale delle mance.

2.1 Valore asintotico del rapporto Mance/Incassi gioco per gioco.

Sia i il gioco in considerazione. Per ogni pezzo giocato di valore s, il banco vincerà 1 pezzo, e ne riceverà 0 di mancia, con probabilità p_i, mentre pagherà c_i pezzi, e ne riceverà m_i di mancia, con probabilità $1 - p_i$.

Supponiamo che vengano giocati in modo indipendente N_i pezzi. La variabile aleatoria V_i, pari al numero totale di pezzi vinti dal banco, avrà distribuzione Binomiale(N_i, p_i). Varranno inoltre le seguenti relazioni:

$$I_i = s\{V_i - c_i(N_i - V_i)\} = s\{(1 + c_i)V_i - c_i N_i\}$$

e

$$M_i = s\, m_i\{N_i - V_i\}.$$

Di conseguenza il rapporto Mance/Incassi relativo al gioco i-esimo sarà dato da:

$$\frac{M_i}{I_i} = \frac{m_i\{N_i - V_i\}}{(1 + c_i)V_i - c_i N_i} = \frac{m_i(1 - \frac{V_i}{N_i})}{(1 + c_i)\frac{V_i}{N_i} - c_i}. \tag{1}$$

Si osservi a questo punto che per la Legge Forte dei Grandi Numeri, con probabilità uno, si ha:

$$\lim_{N_i \to \infty} \frac{V_i}{N_i} = p_i. \tag{2}$$

Dalla (1) e dalla (2) si ricava immediatamente che, con probabilità uno:

$$\lim_{N_i \to \infty} \frac{M_i}{I_i} = \frac{m_i(1 - p_i)}{(1 + c_i)p_i - c_i}. \tag{3}$$

La (3) fornisce il valore asintotico del rapporto Mance/Incassi relativo al gioco i-esimo.

Un esempio chiarirà quanto appena dimostrato in modo formale.

Esempio. Consideriamo il gioco dei Cavalli. Se un pezzo è giocato sui Cavalli, il banco lo vince con probabilità $p_2 = \frac{35}{37}$. Se il giocatore vince, il banco gli restituisce, oltre al pezzo

vincente, un numero di pezzi pari a $c_2 = 17$, mentre il giocatore lascia al banco una mancia pari ad m_2. Supponiamo, per esempio, che il giocatore lasci un pezzo di mancia per ogni tre pezzi vincenti; allora $m_2 = \frac{1}{3}$. Se N_i è il numero di pezzi giocati in modo indipendente sui Cavalli, V_i, ovvero il numero di pezzi vinti dal banco, avrà distribuzione Binomiale(N_i, $\frac{35}{37}$). In base alla (3) il valore asintotico del rapporto Mance/Incassi sarà allora pari a $\frac{2}{3}$. ◇

Dall'esempio precedente appare evidente che per poter calcolare il valore asintotico del rapporto Mance/Incassi per ogni singolo gioco è necessario specificare la regola di attribuzione delle mance.

Esempio. Consideriamo la seguente regola di attribuzione delle mance:

$$m_1 = 1,\ m_2 = \frac{1}{3},\ m_3 = \frac{1}{15},\ m_4 = \frac{1}{25},\ m_5 = \frac{1}{50},\ m_6 = \frac{1}{100},\ m_7 = \frac{1}{100}.$$

Vale a dire: 1 pezzo di mancia per ogni pezzo vincente per il giocatore su Pieno, 1 pezzo di mancia per ogni 3 pezzi vincenti per il giocatore su Cavalli,..., 1 pezzo di mancia per ogni 100 pezzi vincenti per il giocatore su Chanches.

Dalla (3) e dalla precedente regola delle mance discendono i seguenti valori asintotici per il rapporto Mance/Incassi:

Gioco	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{M_i}{I_i}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	0.352

◇

2.2 Valore asintotico globale del rapporto Mance/Incassi

Ci occuperemo ora di calcolare il valore asintotico globale del rapporto Mance/Incassi. Ovvero, se,

$$M = \sum_{i=1}^{7} M_i, \quad \text{e} \quad I = \sum_{i=1}^{7} I_i,$$

vogliamo determinare il valore di $\frac{M}{I}$ allorchè il numero di pezzi N_i giocato in modo indipendente in ogni singolo gioco diventa molto grande.

Sia $N = \sum_{i=1}^{7} N_i$ il numero totale di pezzi di valore s giocati in modo indipendente sui diversi giochi. Supponiamo che ogni singolo pezzo abbia probabilità $f_i > 0$ di essere giocato nel gioco i-esimo, $(i = 1, \ldots, 7)$. Allora il vettore aleatorio $(N_1, \ldots, N_7)$ ha distribuzione Multinomiale(N, $(f_1, \ldots, f_7)$). Il rapporto $\frac{M}{I}$ sarà dato da:

$$\frac{M}{I} = \frac{\sum_{i=1}^{7} m_i\{N_i - V_i\}}{\sum_{i=1}^{7}(1+c_i)V_i - c_i N_i} = \frac{\sum_{i=1}^{7} m_i \frac{N_i}{N}(1 - \frac{V_i}{N_i})}{\sum_{i=1}^{7} \frac{N_i}{N}[(1+c_i)\frac{V_i}{N_i} - c_i]}. \tag{4}$$

Se supponiamo che $N \to \infty$, allora per la Legge Forte dei Grandi Numeri, con probabilità uno si avrà che:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N} = f_i, \quad \text{e} \quad \lim_{N_i\to\infty} \frac{V_i}{N_i} = p_i. \tag{5}$$

Tabella 1: Distribuzioni di frequenza.

	Dist1	Dist2	Dist3	Dist4
f_1	$0.65 \times \frac{1}{3}$	$0.7 \times \frac{1}{3}$	$0.7 \times \frac{1}{3}$	0.3
f_2	$0.65 \times \frac{2}{3}$	$0.7 \times \frac{2}{3}$	$0.7 \times \frac{2}{3}$	0.12
f_3	0.35×0.05	0.3×0.08	0.3×0.12	0.12
f_4	0.35×0.05	0.3×0.1	0.3×0.13	0.12
f_5	0.35×0.3	0.3×0.12	0.3×0.15	0.12
f_6	0.35×0.3	0.3×0.35	0.3×0.3	0.12
f_7	0.35×0.3	0.3×0.35	0.3×0.3	0.10

Tabella 2: Regole di attribuzione delle mance.

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
Manc1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$
Manc2	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0
Manc3	1	0	0	0	0	0	0

Dalla (4) e dalla (5) si ricava immediatamente che:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{M}{I} = \frac{\sum_{i=1}^{7} m_i f_i (1-p_i)}{\sum_{i=1}^{7} f_i[(1+c_i)p_i - c_i]}. \tag{6}$$

Infine, tenendo conto dei valori delle quantità c_i e p_i specificati in precedenza, è agevole verificare che il denominatore che compare nella (6) diviene:

$$\sum_{i=1}^{7} f_i[(1+c_i)p_i - c_i] = \frac{1}{37} + f_7[1.014 - \frac{38}{37}].$$

A titolo di esempio, abbiamo calcolato per mezzo della (6) il valore asintotico di $\frac{M}{I}$ in corrispondenza di quattro diverse distribuzioni di frequenza, relative al numero di pezzi giocate nei diversi giochi, e a tre diverse regole delle mance. Le distribuzioni di frequenza che sono state considerate appaiono nella Tabella 1, mentre le tre regole di attribuzione delle mance appaiono nella Tabella 2. I corrispondenti valori asintotici del rapporto $\frac{M}{I}$ compaiono invece nella Tabella 3.

Dalla Tabella 3 appare evidente che sono la regola di attribuzione delle mance e la distribuzione di frequenza relative ai giochi di Pieno e Cavalli ad influenzare fortemente il valore asintotico del rapporto Mance/ Incassi. Per questo motivo abbiamo ritenuto opportuno valutare questo valore quando si consideri una famiglia di regole di attribuzione delle mance che conferiscono mance solo per i giochi di Pieno o Cavalli, calcolando il valore asintotico di $\frac{M}{I}$ al variare della distribuzione di frequenza dei giochi. I risultati di questa analisi compaiono nelle Tabelle 4 e 5 il cui computo si basa sulla (6) e sulle assunzioni che di seguito elenchiamo;

Tabella 3: Valori asintotici del rapporto Mance/Incassi.

	Dist1	Dist2	Dist3	Dist4
Manc1	0.585859	0.621575	0.617274	0.494054
Manc2	0.532506	0.573468	0.569133	0.399244
Manc3	0.228217	0.245772	0.243914	0.315192

(a) Le mance vengono conferite solo per i giochi Pieno e Cavalli secondo la regola,

$$m_1 = 1, m_2 = \frac{1}{k}, \; m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = 0,$$

la quale attribuisce 1 pezzo di mancia per ogni pezzo vincente del giocatore su Pieno e 1 pezzo di mancia per ogni k pezzi vincenti del giocatore su Cavalli. Nelle Tabelle 4 e 5 sono stati considerati i valori di k da 1 a 10.

(b) La proporzione t di pezzi giocati su Pieno o Cavalli, rispetto al totale dei pezzi giocati, è stata posta uguale a $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.

(c) La proporzione p di pezzi giocati su Pieno, rispetto al totale dei pezzi giocati su Pieno o Cavalli, è stata posta uguale a $p = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.

(d) La proporzione r di pezzi giocati sulle Chanches, rispetto al totale dei pezzi giocati su giochi *diversi* da Pieno o Cavalli, è stata posta uguale a 0.3.

Quando le assunzioni (a)-(d) sono soddisfatte, dalla (6) discende che il valore asintotico di $\frac{M}{I}$ è uguale a:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{M}{I} = \frac{\frac{1}{37}pt + \frac{2}{37k}(1-p)t}{\frac{1}{37} + r(1-t)(1.014 - \frac{38}{37})}$$

Esempio. Supponiamo che sia $k = 1$, ovvero che le mance vengano attribuite secondo la regola che assegna 1 pezzo di mancia per ogni pezzo vincente del giocatore su Pieno e 1 pezzo di mancia per ogni pezzo vincente su Cavalli. Inoltre assumiamo che il 60% dei pezzi vengano giocati su Pieno o Cavalli e che di questi il 20% venga giocato su Pieno. Dalla Tabella 4 si evince che sotto queste ipotesi il valore asintotico del rapporto Mance/Incassi è pari a 1.1463. Se invece fosse $k = 5$, $t = 0.6$, $p = 0.6$, il valore asintotico del rapporto Mance/Incassi sarebbe pari a 0.483994. ◇

Nell'analisi fin qui svolta abbiamo sempre supposto che fossero giocati un numero N di pezzi in modo indipendente ognuno di valore s. In prima approssimazione possiamo però utilizzare i risultati che appaiono nelle Tabelle 4 e 5 anche per il calcolo del valore asintotico di $\frac{M}{I}$ quando si supponga che, per $j = 1, \ldots, n$, vengano giocati in modo indipendente un numero $N(j)$ di pezzi ognuno di valore $s(j)$ secondo la distribuzione di frequenza dist(j) e la regola di attribuzione delle mance $m(j)$. Ciò a patto che tutte le distribuzioni di frequenza dist(j) soddisfino l'ipotesi (d) più sopra descritta e le regole delle mance $m(j)$ soddisfino

la (a). Se infatti, per ogni $j = 1, \ldots, n$, il numero di pezzi giocati in modo indipendente su ogni singolo gioco è molto grande e indichiamo con $\rho(j)$ il valore asintotico del rapporto Mance/Incassi che si ricava dalle Tabelle 4 e 5 in corrispondenza della distribuzione dei giochi dist(j) e della regola delle mance $m(j)$, allora il valore asintotico di $\frac{M}{I}$ diventa uguale a:

$$\frac{M}{I} \approx \frac{\sum_{j=1}^{n} N(j)S(j)\{a + br[1 - t(j)]\}\rho(j)}{\sum_{j=1}^{n} N(j)S(j)\{a + br[1 - t(j)]\}}, \tag{7}$$

ove,

$$a = \frac{1}{37}, \quad b = 1.014 - \frac{38}{37}$$

e $t(j)$ è la proporzione di pezzi giocati su Pieno o Cavalli secondo la distribuzione dist(j).

Esempio. Supponiamo che il totale di Lire giocate in una giornata sia di 2.5 miliardi. Assumiamo inoltre che:

1. 1 miliardo di Lire sia giocato a pezzi indipendenti di valore $s(1) = 10'000$ Lire secondo la regola delle mance $m(1)$ per la quale $k = 7$, ovvero che assegna 1 pezzo di mancia per ogni pezzo vincente su Pieno e 1 pezzo di mancia per ogni 7 pezzi vincenti su Cavalli. Assumiamo inoltre che i pezzi vengano giocati secondo una distribuzione di frequenza dist(1) per la quale sia $t(1) = 0.4$ e $p(1) = 0.2$.

2. 1.5 miliardi di Lire siano giocati a pezzi indipendenti di valore $s(2) = 50'000$ Lire secondo la regola delle mance $m(2)$ per la quale $k = 3$ e una distribuzione dei giochi dist(2) per la quale sia $t(2) = 0.8$ e $p(2) = 0.8$.

Sostituendo nella (7) si ottiene che:

$$\frac{M}{I} \approx 0.54.$$

◇

Esempio. Supponiamo che il totale di Lire giocate in una giornata sia di 6 miliardi. Assumiamo inoltre che:

1. 1.5 miliardi siano giocati a pezzi indipendenti di valore $s(1) = 10'000$ Lire. La regola delle mance $m(1)$ sia tale che $k = 10$ e la distribuzione di frequenza dist(1) sia tale che $t(1) = 0.2$ e $p(1) = 0.4$.

2. 2 miliardi siano giocati a pezzi indipendenti di valore $s(2) = 20'000$ Lire. La regola delle mance $m(2)$ sia tale che $k = 7$, e la distribuzione di frequenze dist(2) sia tale che $t(2) = 0.4$ e $p(2) = 0.4$.

3. 2.5 miliardi siano giocati a pezzi indipendenti di valore $s(3) = 50'000$ Lire. La regola delle mance $m(3)$ sia tale che $k = 3$ e la distribuzione di frequenze dist(3) sia tale che $t(3) = 0.8$ e $p(3) = 0.6$.

Sostituendo nella (7) si ottiene che:

$$\frac{M}{I} \approx 0.42.$$

◇

Tabella 4: Tabella dei valori asintotici di $\frac{M}{I}$ quando siano valide le assunzioni (a)-(d). Nella colonna più a sinistra compaiono i valori di k da 1 a 5. Nella seconda colonna da sinistra compaiono i valori di $p = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$. Infine nella prima riga compaiono i valori di $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.

k	p	0.2	0.4	0.6	0.8	1.
	0	0.452325	0.876002	1.27367	1.64765	2.
	0.2	0.407092	0.788402	1.1463	1.48289	1.8
	0.4	0.36186	0.700802	1.01894	1.31812	1.6
	0.6	0.316627	0.613201	0.891568	1.15336	1.4
	0.8	0.271395	0.525601	0.764201	0.98859	1.2
1	1.	0.226162	0.438001	0.636835	0.823825	1.
	0	0.226162	0.438001	0.636835	0.823825	1.
	0.2	0.226162	0.438001	0.636835	0.823825	1.
	0.4	0.226162	0.438001	0.636835	0.823825	1.
	0.6	0.226162	0.438001	0.636835	0.823825	1.
	0.8	0.226162	0.438001	0.636835	0.823825	1.
2	1.	0.226162	0.438001	0.636835	0.823825	1.
	0	0.150775	0.292001	0.424556	0.549217	0.666667
	0.2	0.165852	0.321201	0.467012	0.604138	0.733333
	0.4	0.18093	0.350401	0.509468	0.65906	0.8
	0.6	0.196007	0.379601	0.551923	0.713982	0.866667
	0.8	0.211085	0.408801	0.594379	0.768903	0.933333
3	1.	0.226162	0.438001	0.636835	0.823825	1.
	0	0.113081	0.219	0.318417	0.411913	0.5
	0.2	0.135697	0.262801	0.382101	0.494295	0.6
	0.4	0.158314	0.306601	0.445784	0.576678	0.7
	0.6	0.18093	0.350401	0.509468	0.65906	0.8
	0.8	0.203546	0.394201	0.573151	0.741443	0.9
4	1.	0.226162	0.438001	0.636835	0.823825	1.
	0	0.090465	0.1752	0.254734	0.32953	0.4
	0.2	0.117604	0.227761	0.331154	0.428389	0.52
	0.4	0.144744	0.280321	0.407574	0.527248	0.64
	0.6	0.171883	0.332881	0.483994	0.626107	0.76
	0.8	0.199023	0.385441	0.560414	0.724966	0.88
5	1.	0.226162	0.438001	0.636835	0.823825	1.

Tabella 5: Tabella dei valori asintotici di $\frac{M}{I}$ quando sinao valide le assunzioni (a)-(d). Nella colonna più a sinistra compaiono i valori di k da 6 a 10. Nella seconda colonna da sinistra compaiono i valori di $p = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$. Infine nella prima riga compaiono i valori di $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.

k	p	t				
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.
	0	0.0753875	0.146	0.212278	0.274608	0.333333
	0.2	0.105542	0.2044	0.297189	0.384452	0.466667
	0.4	0.135697	0.262801	0.382101	0.494295	0.6
	0.6	0.165852	0.321201	0.467012	0.604138	0.733333
	0.8	0.196007	0.379601	0.551923	0.713982	0.866667
6	1.	0.226162	0.438001	0.636835	0.823825	1.
	0	0.0646179	0.125143	0.181953	0.235379	0.285714
	0.2	0.0969268	0.187715	0.272929	0.353068	0.428571
	0.4	0.129236	0.250286	0.363905	0.470757	0.571429
	0.6	0.161545	0.312858	0.454882	0.588446	0.714286
	0.8	0.193854	0.375429	0.545858	0.706136	0.857143
7	1.	0.226162	0.438001	0.636835	0.823825	1.
	0	0.0565406	0.1095	0.159209	0.205956	0.25
	0.2	0.090465	0.1752	0.254734	0.32953	0.4
	0.4	0.124389	0.240901	0.350259	0.453104	0.55
	0.6	0.158314	0.306601	0.445784	0.576678	0.7
	0.8	0.192238	0.372301	0.541309	0.700251	0.85
8	1.	0.226162	0.438001	0.636835	0.823825	1.
	0	0.0502583	0.0973335	0.141519	0.183072	0.222222
	0.2	0.0854392	0.165467	0.240582	0.311223	0.377778
	0.4	0.12062	0.233601	0.339645	0.439373	0.533333
	0.6	0.155801	0.301734	0.438708	0.567524	0.688889
	0.8	0.190982	0.369867	0.537771	0.695674	0.844444
9	1.	0.226162	0.438001	0.636835	0.823825	1.
	0	0.0452325	0.0876002	0.127367	0.164765	0.2
	0.2	0.0814185	0.15768	0.22926	0.296577	0.36
	0.4	0.117604	0.227761	0.331154	0.428389	0.52
	0.6	0.15379	0.297841	0.433047	0.560201	0.68
	0.8	0.189976	0.367921	0.534941	0.692013	0.84
10	1.	0.226162	0.438001	0.636835	0.823825	1.

3 Uno studio preliminare sulla variabilità del rapporto Mance/Incassi

Al fine di valutare la variabilità del rapporto Mance/Incassi, fissiamo il numero totale $N = \sum_{i=1}^{7} N_i$ dei pezzi giocati in modo indipendente. Data una regola di attribuzione delle mance, dall'espressione

$$\frac{M}{I} = \frac{\sum_{i=1}^{7} m_i\{N_i - V_i\}}{\sum_{i=1}^{7}(1+c_i)V_i - c_i N_i} \tag{8}$$

che compare nella (4), appare evidente che la quantità aleatoria $\frac{M}{I}$ dipende dalle quantità aleatorie N_i (numero di pezzi giocati nel gioco i-esimo) e dalle quantità aleatorie V_i (numero di pezzi vinti dal banco nel gioco i-esimo). D'altra parte, se si specificano le leggi di distribuzione delle quantità N_i e V_i, la legge di distribuzione di $\frac{M}{I}$ risulta teoricamente determinata. Dal momento che il calcolo analitico di quest'ultima legge risulta però complesso, abbiamo preferito seguire un metodo di simulazione Monte Carlo per giungere ad una approssimazione numerica di alcune quantità che da essa dipendono. In particolre sono state effettuate due simulazioni; la prima con lo scopo di valutare la variabilità mensile del rapporto Mance/Incassi, e la seconda per valutare la sua variabilità annuale. Per effettuare la prima simulazione abbiamo pertanto fissato il numero di pezzi giocati in modo indipendente in un mese tipo, mentre per la seconda abbiamo fissato mese per mese il numero di pezzi giocati in modo indipendente.

La prima simulazione è stata condotta nel modo che ora descriviamo. N è stato fissato uguale a 4'500'000, avendo supposto che in una giornata tipo il volume di gioco sia pari a 3 miliardi di Lire giocati a pezzi indipendenti da 20'000 Lire e che in un mese ci siano 30 giorni. Per ognuna delle distribuzioni di frequenza elencate nella Tabella 1 e delle regole delle mance elencate nella Tabella 2 è stato generato un campione di 500 osservazioni dalla legge di distribuzione mensile di $\frac{M}{I}$ in accordo con la (8) e con le assunzioni descritte nella sezione precedente relative alle leggi di distribuzione delle quantità N_i e V_i. Infine si è calcolato il valore medio campionario, lo scarto quadratico medio campionario e la media troncata di ordine 0.25 per ognuno dei campioni. Il valor medio campionario e lo scarto quadratico medio campionario sono considerati come buone approssimazioni della media e dello scarto quadratico medio della legge di distribuzione di $\frac{M}{I}$. La media troncata ha lo scopo di stimare il centro della stessa legge di distribuzione eliminando l'influenza di valori campionari molto alti o molto bassi. I risultati di questa simulazione compaiono nella Tabella 6.

La seconda simulazione è stata condotta nel modo seguente. Il numero di pezzi giocati in modo indipendente è stato così fissato:

$$\begin{array}{lll} \text{Gennaio} = 7'200'000, & \text{Febbraio} = 16'050'000, & \text{Marzo} = 4'600'000 \\ \text{Aprile} = 5'350'000, & \text{Maggio} = 4'250'000, & \text{Giugno} = 4'400'000 \\ \text{Luglio} = 4'300'000, & \text{Agosto} = 8'650'000, & \text{Settembre} = 4'450'000 \\ \text{Ottobre} = 4'800'000, & \text{Novembre} = 3'350'000, & \text{Dicembre} = 5'900'000. \end{array} \tag{9}$$

Ciò corrisponde ad assumere che nel mese di Gennaio il volume di gioco sia pari a 144 Miliardi di Lire giocati in modo indipendente a pezzi da 20'000 Lire, e così via per gli altri

Tabella 6: Risultati della prima simulazione; in ogni casella compaiono la media campionaria, la media troncata di ordine .25 (tra parentesi), e lo scarto quadratico medio campionario di 500 osservazioni generate dalla legge di distribuzione mensile di $\frac{M}{I}$ quando il numero di pezzi giocati in modo indipendente sia pari a 150'000.

	Dist1	Dist2	Dist3	Dist4
Manc1	0.587 (0.584) 0.041	0.631 (0.629) 0.050	0.623 (0.621) 0.049	0.496 (0.493) 0.037
Manc2	0.532 (0.530) 0.041	0.574 (0.572) 0.045	0.570 (0.569) 0.043	0.399 (0.397) 0.031
Manc3	0.230 (0.229) 0.018	0.247 (0.245) 0.021	0.246 (0.245) 0.019	0.315 (0.314) 0.024

Tabella 7: Risultati della seconda simulazione; in ogni casella compaiono la media campionaria, la media troncata di ordine 0.25 (tra parentesi), e lo scarto quadratico medio campionario di 500 osservazioni generate dalla legge di distribuzione annuale di $\frac{M}{I}$ quando il numero di pezzi giocati in ogni mese è descritto nelle (9).

	Dist1	Dist2	Dist3	Dist4
Manc1	0.585 (0.585) 0.010	0.621 (0.621) 0.011	0.617 (0.617) 0.012	0.493 (0.493) 0.009
Manc2	0.532 (0.532) 0.010	0.573 (0.572) 0.011	0.569 (0.569) 0.011	0.399 (0.399) 0.007
Manc3	0.228 (0.228) 0.004	0.246 (0.245) 0.004	0.243 (0.243) 0.004	0.315 (0.315) 0.005

mesi. Per ognuna delle distribuzioni di frequenza elencate nella Tabella 1 e delle regole delle mance elencate nella Tabella 2 è stato generato un campione di 500 osservazioni dalla legge di distribuzione annuale di $\frac{M}{I}$ in accordo con le assunzioni precedentemente descritte. Infine si è calcolato il valore medio campionario, la varianza campionaria e la media troncata di ordine 0.25 per ognuno dei campioni. I risultati di questa simulazione compaiono nela Tabella 7.

Notiamo innanzitutto che i valori delle medie campionarie così determinati sono in ottimo accordo con i valori asintotici del rapporto $\frac{M}{I}$ che abbiamo determinato nella Tabella 3. Inoltre, come era ragionevole aspettarsi, la variabilità mensile del rapporto Mance/Incassi è notevolmente superiore alla sua variabilità annuale; in generale, all'aumentare del numero di pezzi giocati in modo indipendente la variabilità del rapporto tenderà a diminuire.

L'analisi delle Tabelle 6 e 7 ci porta tuttavia a ulteriori conclusioni che forse non discendono in modo immediato dal modello probabilistico descritto nella (8). Appare infatti evidente che i valori dello scarto quadratico medio dipendono non solo dalla legge di distribuzione dei giochi, ma soprattutto dalla regola di attribuzione delle mance. In particolare gli scarti quadratici medi relativi alle regole Manc1 e Manc2 sono, in entrambe le tabelle, molto simili e nettamente differenti da quelli relativi alla regola Manc3. Come appare dalla Tabella 2, Manc1 e Manc2 attribuiscono le stesse mance nei giochi di Pieno e Cavalli e differiscono per il modo in cui le mance sono attribuite nei restanti giochi, mentre Manc2 e Manc3 differiscono solo per l'attribuzione delle mance nel gioco dei Cavalli. Al fine della valutazione della variabilità del rapporto Mance/Incassi, sembra dunque che la regola di

Tabella 8: Intervalli campionari che con probabilità 0.9 contengono le realizzazioni del rapporto mensile Mance/Incassi, costruiti sulla base dei risultati ottenuti nella prima simulazione.

	Dist1	Dist2	Dist3	Dist4
Manc1	(0.52, 0.68)	(0.55, 0.70)	(0.54, 0.70)	(0.43, 0.55)
Manc2	(0.47, 0.61)	(0.50, 0.66)	(0.51, 0.64)	(0.35, 0.45)
Manc3	(0.20, 0.25)	(0.21, 0.28)	(0.21, 0.27)	(0.28, 0.35)

Tabella 9: Intervalli campionari che con probabilità 0.9 contengono le realizzazioni del rapporto annuale Mance/Incassi, costruiti sulla base dei risultati ottenuti nella prima simulazione.

	Dist1	Dist2	Dist3	Dist4
Manc1	(0.56, 0.60)	(0.60, 0.64)	(0.59, 0.63)	(0.47, 0.50)
Manc2	(0.51, 0.54)	(0.55, 0.59)	(0.55, 0.58)	(0.38, 0.41)
Manc3	(0.22, 0.23)	(0.23, 0.25)	(0.23, 0.25)	(0.30, 0.32)

attribuzione delle mance per il gioco di Cavalli sia ancora una volta discriminante. In base al modello probabilistico descritto dalla (8), se la distribuzione di frequenza relativa ai giochi non è molto dissimile da quelle riportate nella Tabella 1, una maggior variabilità del rapporto Mance/Incassi tende ad avvalorare l'ipotesi secondo la quale i giocatori lasciano mance consistenti anche per il gioco dei Cavalli e non solo per quello di Pieno.

I campioni ottenuti nelle due simulazioni più sopra descritte permettono anche di calcolare in modo approssimato degli intervalli che con probabilità fissata contengano la realizzazione del rapporto aleatorio $\frac{M}{I}$. Nelle Tabelle 8 e 9 compaiono le valutazioni approssimate degli intervalli che con probabilità 0.9 contengono le realizzazioni del rapporto Mance/Incassi quando sia stata fissata una delle distribuzioni dei giochi che appaiono nella Tabella 1 e una delle regole di attribuzione delle mance che appaiono nella Tabella 2.

4 Conclusioni

In questa nota, a carattere puramente metodologico, abbiamo messo in evidenza gli elementi aleatori che influenzano maggiormente la legge di distribuzione del rapporto Mance/Incassi nel gioco della Roulette Francese. Più precisamente abbiamo mostrato che non sono solo le regole del gioco, ma anche, e soprattutto, sono la distribuzione di frequenza dei giochi e la regola di attribuzione delle mance a condizionare sia il valore asintotico del rapporto $\frac{M}{I}$ che la sua variabilità. A tale proposito vogliamo sottolineare le seguenti osservazioni;

1. Per il calcolo del valore asintotico e della variabilità di $\frac{M}{I}$ appare fondamentale la regola di attribuzione delle mance al gioco dei Cavalli, fermo restando che la regola per il Pieno

preveda di assegnare un pezzo di mancia per ogni pezzo vincente del giocatore, e che la distribuzione dei giochi non sia troppo dissimile da quelle considerate nel lavoro.

2. La variabilità del rapporto Mance/Incassi diminuisce al crescere del numero di pezzi giocati in modo indipendente. Ciononostante, come emerge dalle Tabelle 6 e 8, la variabilitaà mensile del fenomeno in esame rimane ancora sufficientemente elevata. La variabilità *giornaliera* del rapporto Mance/Incassi risulta essere così elevata da rendere poco significativa una analisi condotta a partire dal modello espresso dalla (8). Riteniamo che ciò sia un pregio del modello proposto in quanto esso riesce ad evidenziare una caratteristica apparentemente osservata del comportamento del rapporto in esame.

3. L'importanza della legge di distribuzione dei giochi e della regola di attribuzione delle mance per la determinazione della legge di distribuzione del rapporto Mance/incassi sono tali da rendere di primario interesse un'indagine statistica che miri alla loro stima.

Pavia, 1 Luglio 1993.

COLLANE DEL DIPARTIMENTO

CR - CONTRIBUTI DI RICERCA

01. Mori, P., "Sul confronto fra sentieri spot e sentieri contrattuali di disoccupazione", Aprile, 1982.

02. De Vecchi, N., "La scienza del capitale fra tradizione ed irrequietezza: Capitale e interesse nella teoria", Ottobre, 1983.

03. Vaggi, G., "The Role of Profits in Physiocratic Economics", Luglio, 1984.

04. Carabelli, A., "On Keynes' Method: Practical Rationality", Settembre, 1984.

05. Bianchi, C., "Servizi bancari imputati e interdipendenze settoriali: un'analisi strutturale del ruolo del credito nel sistema bancario", Ottobre, 1984.

06. Vaggi, G., "A Physiocratic Model of Relative Prices and Income Distribution", Ottobre, 1984.

07. Carabelli, A., "J.M. Keynes on Cause, Change and Possibility", Ottobre, 1984.

08. Carabelli, A., "On Keynes' Method", Ottobre, 1984.

09. Muliere, P., "Misure della concentrazione: alcune osservazioni sull'impostazione assiomatica", Giugno, 1985.

10. Bianchi, C., "Crescita, produttività ed occupazione in un'analisi dinamica. Prospettive e proposte per l'economia italiana nel prossimo decennio", Settembre, 1985.

11. Castagnoli, E., e Muliere, P., "Sulle trasformate integrali di funzioni di ripartizione", Gennaio, 1986.

12. Giannini, C., e Urga, G., "Sostituibilità, analisi input-output, energia e altri fattori: un'applicazione dei sistemi dinamici dei domanda al settore manifatturiero italiano", Marzo, 1986.

13. Giannasca, C., e Mosconi, R., "I modelli autoregressivi vettoriali per l'analisi di serie storiche economiche: una rassegna della letteratura recente", Aprile, 1986.

14. Giannini, C., e Mosconi, R., "Prediction from unrestricted VAR models with deterministic components", Dicembre 1986.

15. Giannini, C., e Mosconi, R., "On the concept of non-significant functions in a multivariate regression framework with special regard to VAR models", Dicembre, 1986.

16. Giannini, C., e Mosconi, R., "Predictions from restricted VAR models", Dicembre, 1986.

17. De Vecchi, N., "La scuola viennese di economia", Ottobre, 1987.

18. Rampa, G., "Conjectures, learning and equilibrian monopolistic competition", Giugno, 1988.

19. Bianchi C., e Rampa, L., "Financial Assets and the Short-run Dynamics of a Capitalist Economy", Giugno, 1988.

20. Mori, P., "Wages and job matching in internal labour markets under asymmetric information", Giugno, 1988.

21. Mori, P., "Contract enforceability, authority and costly supervision", Agosto, 1988.

22. Mori, P., "On incomplete information and the emergence of trade unions", Settembre, 1988.

23. Mori, P., "Renegotiable seniority rules and promotion ladders under adverse selection", Ottobre, 1988.

24. Mori, P., "Le risorse umane nell'impresa capitalistica", Marzo, 1990.

25. Bertocco, G., "Teoria e politica monetaria nell'analisi della Banca d'Italia", Maggio, 1990; in corso di pubblicazione presso l'Editore Giappichelli.

26. Mori, P., "Job signalling and the returns to private information", Settembre, 1990.

27. Muliere, P., Petrone, S., "Generalized Lorenz curve and monotone dependence orderings", Settembre 1990.

28. Montani, G., "Moneta europea, riforma dello stato del benessere e democrazia economica", Novembre 1990.

29. Bertocco, G., "Il ruolo della politica monetaria nel pensiero di tre governatori della Banca d'Italia ", Febbraio 1992.

30. Vaggi, G., "Teorie della ricchezza dal mercantilismo a Smith", Aprile 1992.

31. Vaggi, G., "From the debt crisis to sustainable development. Changing perspectives on Nord-South relationships", Luglio 1992.

32. Muliere, P, Secchi P., "Exchangeability, predictive sufficiency and bayesian bootstrap", Settembre 1992.

33. Vaggi, G., "The theory of wealth, the ancien regime and the physiocratic experiment", ottobre 1992.

34. Muliere, P., Parmigiani , G. e Polson, N., "A note on the residual entropy function", ottobre 1992.

35. Mori P., Patrone F., "Partial employer authority as optimal labour contract", 1992.

36. Mori, P., "Specific human capital, internal careers, and adverse selection", 1992.

37. Mori, P., "Equilibri concorrenziali con posti di lavoro indivisibili", 1992;

38. Consonni, G. , Veronese P., "A Bayesian method for combinig results from several binomial experiments", maggio 1993;

39. Muliere, P. , Secchi, P. , "Un'analisi probabilistica del rapporto Mance/Incassi nel gioco della roulette francese", luglio 1993.

SD - SERIE DIDATTICA

01. Mori, P., "Note su efficienza ed equilibrio", Giugno, 1981.

02. Bertocco, G., "Il ruolo delle politiche di stabilizzazione nei modelli macroeconomici", Aprile, 1984.

03. Bianchi, C., "Svalutazione, inflazione e bilancia dei pagamenti", Maggio, 1984.

04. Bertocco, G., "Alcune premesse alla costruzione di un modello econometrico del settore monetario dell'economia italiana", Luglio, 1985.

05. Bertocco, G., "Il sistema dei fulussi finanziari: grandezze reali e monetarie del sistema economico italiano", Aprile, 1986.

06. Giannini, C., e Aleati, A., "La fase di controllo diagnostico nell'analisi econometrica dinamica, Giugno, 1986.

07. Montani, G., "Lo stato e l'economia internazionale", Ottobre, 1986.

08. Bertocco, G., "Temi di politica monetaria", Aprile, 1987.

09. Bianchi, C., "L'intervento nello Stato nell'economia: Keynesiani e monetaristi", Novembre, 1987.

10. Murat M., " Nuova macroeconomia e modelli di economia aperta", Febbraio, 1988.

11. Rampa, G. "Input-Output e Contabilità Nazionale", Ottobre 1988.

12. Rampa, G., "L'equilibrio Economico Generale. Note introduttive", Dicembre, 1988.