UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

Istituto di Matematica Finanziaria "E. LEVI"

E. CASTAGNOLI - P. MULIERE

Su una equazione funzionale e alcuni problemi di caratterizzazione

SERIE II

n. 21

Edizioni TECNOGRAFICA - Parma 1984

E. CASTAGNOLI - P. MULIERE

Su una equazione funzionale e alcuni problemi di caratterizzazione

Edizioni TECNOGRAFICA - Parma 1984

1. PREMESSA.

In questa nota intendiamo presentare alcuni risultati preliminari che scaturiscono dallo studio di una equazione funzionale della quale ci paiono interessanti le applicazioni al Calcolo delle Probabilità.

Pur non ritenendo ancora definitiva la versione qui riportata ci sembra il caso di presentarla ugualmente sia perchè ci pare una base già sufficientemente ampia di un discorso che speriamo di sviluppare in futuro sia per mettere un punto fermo ad una ricerca già in corso da tempo.

Quanto alle possibilità di applicazione crediamo che le più interessanti riguardino:

(i) la caratterizzazione di distribuzioni di probabilità,

(ii) le trasformate di funzioni di ripartizione che speriamo possano ricevere una trattazione unitaria,

(iii) qualche questione relativa a teoremi limite,

(iv) questioni di divisibilità e di stabilità.

In questa versione che, ripetiamo , riteniamo ancora provvisoria presenteremo nel n.2 gli aspetti generali del problema e nel n. 3 la loro particolarizzazione a valori medi di funzioni di variabili casuali. Infine , nel n.4, daremo brevemente conto di alcuni semplici usi, a fini di caratterizzazione, dei risultati del n.3.

Le varie parti del lavoro , pur discusso in comune, sono opera di uno soltanto di noi: precisamente E. Castagnoli ha curato il n.2, P. Muliere i nn. 3 e 4.

2. ASPETTI GENERALI DEL PROBLEMA.

Sia $\mathfrak{F}$ un funzionale definito nello spazio delle funzioni di ripartizione (f. r.) . Indicate con F e G due generiche f.r. , restringeremo la nostra attenzione ai funzionali che godono della proprietà :

$$\mathfrak{F}\,(\,pF + (1-p)G\,) = H\,(\,\mathfrak{F}(F)\,,\ \mathfrak{F}(G)\,,\ p\,) \qquad (1)$$

con $p \in [0,1]$.

Evidentemente la (1) richiede che il valore del funzionale di una mistura dipenda soltanto dai valori assunti in corrispondenza delle singole f.r., oltreché dal peso p. Nel seguito per brevità sottoindenderemo la dipendenza di H da p.

Consideriamo ora due generiche variabili casuali (v.c.) X ed Y con f.r. F_X e F_Y ed a valori in un intervallo $\Omega \subseteq R$. Indicata con $\phi(X,Y)$ una funzione delle due v.c., vogliamo verificare quando è soddisfatta la seguente equazione:

$$\mathfrak{F}_1(\,F_{\phi(X,Y)}\,) = T\,(\,\mathfrak{F}_2(F_X)\,,\ \mathfrak{F}_3(\,F_Y)\,) \qquad (2)$$

$\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ sono tre funzionali del tipo indicato dalla (1) con la stessa funzione H. Con maggiore generalità si sarebbe potuto supporre la validità della (1) con funzioni H diverse per ogni funzionale:

$$\mathfrak{F}_i\,(\,pF + (1-p)\,G\,) = H_i\,(\,\mathfrak{F}_i(F)\,,\ \mathfrak{F}_i(G)\,) \qquad i= 1,2,3 \qquad (1')$$

Di questo caso daremo brevemente conto più avanti.

Chiamiamo I la v.c. che assume valori 0 e 1 con probabilità $(1-p)$ e p, $0 \leqslant p \leqslant 1$. Siano inoltre Y_1, Y_2 ed X v.c. indipendenti in probabilità tra loro e da I.

Se definiamo

$$Y = I\, Y_1 + (1-I)\, Y_2$$

si ha:

$$F_Y = F_{(IY_1 + (1-I)Y_2)} = pF_{Y_1} + (1-p)F_{Y_2}\,.$$

Possiamo pertanto scrivere:

$$\mathfrak{F}(F_Y) = \mathfrak{F}(pF_{Y_1} + (1-p)\, F_{Y_2}) = H(\mathfrak{F}(F_{Y_1}), \mathfrak{F}(F_{Y_2})) \qquad (3)$$

Ne consegue che $F_{\phi(X,Y)}$ è mistura di $F_{\phi(X,Y_1)}$ e $F_{\phi(X,Y_2)}$ da cui per la (1) si ha:

$$\mathfrak{F}_1(F_{\phi(X,Y)}) = H(\mathfrak{F}_1(F_{\phi(X,Y_1)}), \mathfrak{F}_1(F_{\phi(X,Y_2)}))$$

Per la (2) possiamo scrivere inoltre:

$$\mathfrak{F}_1(F_{\phi(X,Y_1)}) = T(\mathfrak{F}_2(F_X), \mathfrak{F}_3(F_{Y_1}))$$

$$\mathfrak{F}_1(F_{\phi(X,Y_2)}) = T(\mathfrak{F}_2(F_X), \mathfrak{F}_3(F_{Y_2}))$$

e quindi

$$\mathfrak{F}_1(F_{\phi(X,Y)}) = H\{T(\mathfrak{F}_2(F_X), \mathfrak{F}_3(F_{Y_1})), T(\mathfrak{F}_2(F_X), \mathfrak{F}_3(F_{Y_2}))\} \qquad (4)$$

D'altra parte la (2) consente di affermare che:

$$\mathfrak{F}_1(F_{\phi(X,Y)}) = T(\mathfrak{F}_2(F_X), \mathfrak{F}_3(F_Y))$$

e per la (3) si ha

$$\mathfrak{F}_3(F_Y) = H(\mathfrak{F}_3(F_{Y_1}), \mathfrak{F}_3(F_{Y_2}))$$

e dunque in definitiva:

$$\mathfrak{F}_1(F_{\phi(X,Y)}) = T\{\mathfrak{F}_2(F_X), H(\mathfrak{F}_3(F_{Y_1}), \mathfrak{F}_3(F_{Y_2}))\}. \qquad (5)$$

Uguagliando i secondi membri della (4) e della (5) si ha:

$$H\{T(\mathfrak{F}_2(F_X), \mathfrak{F}_3(F_{Y_1})), T(\mathfrak{F}_2(F_X), \mathfrak{F}_3(F_{Y_2}))\} =$$

$$= T\{\mathfrak{F}_2(F_X), H(\mathfrak{F}_3(F_{Y_1}), \mathfrak{F}_3(F_{Y_2}))\} \qquad (6)$$

Se poniamo per brevità $\mathfrak{F}_2(F_X) = a$, $\mathfrak{F}_3(F_{Y_1}) = b$, $\mathfrak{F}_3(F_{Y_2}) = c$ la (6) diventa:

$$H(T(a,b), T(a,c)) = T(a, H(b,c)) \qquad (7)$$

Ripetendo il ragionamento nell'ipotesi che F_X sia mistura di F_{X_1} e F_{X_2} si giunge a:

$$H\{T(\mathfrak{F}_2(F_{X_1}), \mathfrak{F}_3(F_Y)), T(\mathfrak{F}_2(F_{X_2}), \mathfrak{F}_3(F_Y))\} =$$

$$= T\{H(\mathfrak{F}_2(F_{X_1}), \mathfrak{F}_2(F_{X_2})), \mathfrak{F}_3(F_Y)\} \qquad (8)$$

Posto $\mathcal{F}_2(F_{X_1}) = \alpha$, $\mathcal{F}_2(F_{X_2}) = \beta$ e $\mathcal{F}_3(F_Y) = \gamma$ la (8) diventa:

$$H(\,T(\alpha\,,\gamma\,)\,,T\,(\beta\,,\gamma\,)\,) = T\,(\,H(\alpha\,,\beta\,)\,,\gamma\,) \qquad (9)$$

Il problema che ci poniamo consiste nel risolvere la coppia di equazioni funzionali (7) e (9) nelle funzioni incognite H e T. Ciascuna delle due è una equazione della distributività. Basta risolverne una imponendo che T sia funzione simmetrica: in tal caso , e solo in tal caso , le due equazioni coincidono.

L'equazione della distributività può essere risolta sotto diversi sistemi di ipotesi:

I) Se T è inferiormente limitata e H è continua, crescente, associativa per $x,y \in [e,w)$ con elemento neutro e (*), la soluzione del sistema (7)-(9) è:

$$T(u,z) = h^{-1}(\,k\,h(u)h(z)\,)$$

$$H(x,y) = h^{-1}(\,h(x) + h(y)\,)$$

con k costante arbitraria e h arbitraria funzione continua e strettamente crescente tale che $h(e) = 0$ e $h(w) = 1$.

II) Se T e H sono due volte differenziabili con continuità e $H(t,t) = z$ ha un'unica soluzione in t (per ogni z) , la soluzione del sistema ammette una delle seguenti tre rappresentazioni:

(*) L'associatività di H significa che:

$$H(x,\,H(y,z)\,) = H(\,H(x,y)\,,z\,) \qquad \forall\ x,y,z \in [\,e,w)$$

Il fatto che e sia elemento neutro significa che:

$$H(e,x) = H(x,e) = x \qquad \forall\ x \in [\,e,w)$$

II.1)

$$T(u,z) = h^{-1}(\,h(u) + h(z) + k\,)$$

$$H(x,y) = h^{-1}(\,h(y) + \rho[\,h(x) - h(y)\,]\,)$$

II.2)

$$T(u,z) = h^{-1}(\,k - h(u) - h(z)\,)$$

$$H(x,y) = h^{-1}(\,h(y) + \rho[h(x) - h(y)]\,) \text{ con } \rho(-x) = -\rho(x)$$

II.3)

$$T(u,z) = h^{-1}(\,k + c\,h(u)h(z)\,)$$

$$H(x,y) = h^{-1}(\,h(y) + d\cdot[\,h(x) - h(y)\,]\,)$$

dove h è un'arbitraria funzione strettamente monotona due volte differenziabile con continuità e k,c,d sono costanti arbitrarie. La funzione ρ è arbitraria, purché due volte differenziabile con continuità, nel caso II.1) mentre deve soddisfare la proprietà $\rho(-x) = -\rho(x)$ nel caso II.2).

Le soluzioni riportate sono quelle fornite da Aczél (1966). Precisamente il caso I) è il contenuto del Teorema 6 di pag. 319, il caso II) è il contenuto del Teorema 2 di pag. 341: si tenga presente in ogni caso la richiesta aggiuntiva di simmetria per T.

<u>Osservazione 1.</u> Come appare chiaro dalla diversa natura delle ipotesi, la soluzione per il caso I) ha carattere globale, per il caso II) carattere locale.

Osservazione 2 . Nella più generale ipotesi (1'):

$$\mathfrak{F}_i(pF + (1-p)\ G) = H_i(\ \mathfrak{F}_i(F)\ ,\ \mathfrak{F}_i(G)\ ) \qquad i = 1,2,3.$$

si sarebbe ottenuto il seguente sistema di equazioni funzionali:

$$H_1\ (\ T(a,b),\ T(a,c)\ ) = T\ (\ a,\ H_2(b,c)\ )$$

$$H_1\ (\ T(\alpha,\gamma),T(\beta\ ,\gamma)) = T\ (\ H_3(\alpha\ ,\ \beta\ )\ ,\ \gamma\ )$$

in luogo del sistema (7)-(9). Esso si sarebbe potuto risolvere , nelle ipotesi del Teorema 1 di pag. 335 di Aczél (1966) , particolarizzando la soluzione ivi fornita ottenendo:

$$T(u,z) = h^{-1}(\ k + c\ g(u)g(z)\ )$$

$$H_1(x,y) = h^{-1}(\ h(x) + h(y)\ )$$

$$H_2(x,y) = H_3(x,y) = g^{-1}(\ g(x) + g(y)\ )$$

Osservazione 3. La dipendenza di H da p , sin qui volutamente trascurata , può essere recuperata sfruttando le costanti arbitrarie, o le funzioni ρ nei casi II.1) e II.2), che compaiono sia in H sia in T.

3. VALORI MEDI DI FUNZIONI DI VARIABILI CASUALI.

Consideriamo qui in particolare il caso dei funzionali lineari:

$$\mathfrak{F}(\ pF + (1-p)G) = p\,\mathfrak{F}(F) + (1-p)\ \mathfrak{F}(G)$$

Per essi H è del tipo :

$$H(x,y) = px + (1-p)\ y \tag{10}$$

Rivediamo i quattro casi esaminati nel n.2 per individuare la forma che di conseguenza deve assumere la funzione T.

I) E' opportuno pensare che la costante k che compare in T sia ottenuta come:

$$k = k'p(1-p)$$

Con ciò riesce:

$$T(u,z) = h^{-1}(k'p(1-p)h(u)h(z)\ )$$

ovvero , posto:

$$h_p(u) = ph(u) \qquad ; \qquad h_{(1-p)}(z) = (1-p)h(z)$$

risulta:

$$T(u,z) = h^{-1}(\ k'\ h_p(u)\ h_{(1-p)}(z)\ )$$

Ne consegue che

$$H(x,y) = h^{-1}(h_p(x) + h_{(1-p)}(y)\ ) =$$

$$h^{-1}(\ ph(x) + (1-p)\ h(y)\ )$$

e, perchè H sia del tipo (10) , deve essere $h(x) = mx + q$.
Ciò consente di affermare finalmente che :

$$T(u,z) = kmuz + kq(u + z) + (mq^2 - q)/m$$

II.1) Perchè H sia della forma (10) , occorre porre $h(x) = mx + q$ e $\rho(x) = px$. Ne consegue che:

$$T(u,z) = u + z + (q+k)/m$$

II.2) Con la stessa posizione precedente si ha :

$$T(u,z) = -u - z + (q+k)/m$$

II.3) Bisogna porre $h(x) = mx + q$ e $d = p$ affinché H assuma la forma (10).
Di conseguenza:

$$T(u,z) = mcuz + cq(u + z) + (k + cq^2)/m$$

L'espressione più generale di T è allora :

$$T(u,z) = A\,u\,z + B(u + z) + C \tag{11}$$

che si ha , seppur sotto le ipotesi diverse indicate nel n.2, sia nel caso I) sia nel caso II.3).

Nel caso II.1) $A= 0$ e $B=1$, nel caso II.2) $A=0$ e $B= -1$.

Nel seguito assumeremo dunque per T la forma (11) che copre tutte le possibilità.

Esaminiamo ora in particolare il caso che i funzionali nella (2) siano valori medi di funzioni di v.c. stocasticamente indipendenti ed a valori in uno stesso intervallo $\Omega \subseteq R$:

$$\mathcal{F}_i(F) = \int_\Omega f_i(x)\,dF(x) = E(f_i(X)) \qquad i = 1,2,3.$$

L'equazione (2) assume l'aspetto:

$$E\{ f_1(\phi(X,Y)) \} = T(E(f_2(X)), E(f_3(Y))) \tag{12}$$

La (12) deve valere in particolare anche quando X ed Y sono due v.c. degeneri che assumono rispettivamente il solo valore $x \in \Omega$ e il solo valore $y \in \Omega$. In tal caso la (12) assume l'aspetto:

$$f_1(\phi(x,y)) = T(f_2(x) , f_3(y))$$

e, tenendo conto della forma di T data dalla (11):

$$f_1(\phi(x,y)) = A\,f_2(x)\,f_3(y) + B(f_2(x) + f_3(y)) + C \tag{13}$$

Ricercheremo le funzioni f_1, f_2, f_3 e ϕ che soddisfanno l'equazione (13).
Ci limiteremo nella ricerca alle funzioni f_1, f_2, f_3 continue e strettamente monotone e alle funzioni ϕ che godono delle proprietà:

i) per ogni $x,y \in \Omega$ risulta $\phi(x,y) \in \Omega$

ii) esiste un numero reale $e \in \Omega$ tale che $\phi(e,x) = \phi(x,e) = x$ per ogni $x \in \Omega$ (esistenza dell'elemento neutro);

iii) per ogni $x \in \Omega$ esiste un numero reale $x^{-1} \in \Omega$ tale che $\phi(x^{-1},x) = e$ (esistenza dell'inverso).

Per la risoluzione dell'equazione (13) distinguiamo due casi, secondo che $A=0$ oppure $A \neq 0$.

<u>1° Caso.</u> $A = 0$.

La (13) diventa:

$$f_1(\phi(x,y)) = B(f_2(x) + f_3(y)) + C \qquad \text{con } B \neq 0. \tag{14}$$

Se poniamo :

$$B\,f_2(x) + C = g(x)$$
$$B\,f_3(y) + C = h(y)$$
$$f_1(\phi(x,y)) + C = l(\phi(x,y))$$

la (14) può scriversi:

$$l(\phi(x,y)) = g(x) + h(y) \quad (15)$$

Se poniamo x=e si ha, sfruttando l'ipotesi ii):

$$l(y) = g(e) + h(y)$$

ovvero :

$$h(y) = l(y) - a \qquad \text{dove } a = g(e)$$

Ponendo invece y = e si ottiene

$$l(x) = g(x) + h(e)$$

ovvero:

$$g(x) = l(x) - b \qquad \text{dove } b = h(e)$$

La (15) assume ora l'aspetto:

$$l(\phi(x,y)) = l(x) + l(y) - a - b$$

ovvero, detta $\varphi(t) = l(t) - a-b = f_1(t) + c - a - b$ (*)

$$\varphi(\phi(x,y)) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad (16)$$

La (16) mostra che, qualunque sia φ continua e strettamente monotona (come dev'essere per l'ipotesi fatta su f_1) , riesce:

(*) L'equazione (16) , visto che impone che un valore assunto da φ sia uguale alla somma di due valori di φ stessa, ha senso se e solo se il codominio di φ è un intervallo chiuso rispetto all'addizione e cioè:

$(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, 0)$, $(-\infty, 0]$, $(0, +\infty)$, $[0, +\infty)$

Ciò implica:

$$\text{cod } l = \text{cod } \varphi + a + b$$
$$\text{cod } g = \text{cod } \varphi + a$$
$$\text{cod } h = \text{cod } \varphi + b$$

ed ancora

$$\text{cod } f_1 = \text{cod } \varphi + a + b - C$$
$$\text{cod } f_2 = (\text{cod } \varphi + a - C)/B$$
$$\text{cod } f_3 = (\text{cod } \varphi + b - C)/B$$

$$\phi(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y)) \quad (17)$$

Dalla (17) si ha che, qualunque sia φ (e quindi a monte qualunque sia f_1) purché continua e strettamente monotona, la funzione ϕ data dalla (17) risolve l'equazione (16) (*)

Si vede facilmente ancora che non solo φ ma anche tutte e sole le funzioni $k\,\varphi(t)$ (k costante) conducono alla stessa funzione ϕ . (**)

(*) La (17) inoltre ci dice che oltre alle proprietà richieste come ipotesi l'operazione $\phi(x,y)$ gode necessariamente anche delle seguenti proprietà: (si veda Aczél(1966) pag. 253-254) :

iv) $\phi(\phi(x,y),z) = \phi(x, \phi(y,z))$ (commutatività)

v) $\phi(x,y)$ è continua rispetto ad x ed ad y.

(**) Infatti se φ_0 è una funzione continua e strettamente monotona di dominio Ω e codominio chiuso rispetto alla somma, col che:

$$\phi(x,y) = \varphi_0^{-1}(\varphi_0(x) + \varphi_0(y))$$

La (16) diventa:

$$\varphi(\varphi_0^{-1}(\varphi_0(x) + \varphi_0(y))) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Allora (si veda Aczél (1966) pag. 148) ogni altra soluzione dominabile mediante una funzione misurabile secondo Lebesgue su un insieme di misura positiva è della forma:

$$\varphi(x) = k\,\varphi_0(x)$$

con k costante arbitraria.

Ne consegue che le soluzioni della (15) sono le seguenti

$$l(t) = k\varphi(t) + a + b$$

$$g(t) = k\,\varphi(t) + a$$

$$h(t) = k\,\varphi(t) + b$$

$$\phi(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y))$$

con k, a , b costanti arbitrarie e φ arbitraria funzione continua e strettamente monotona.

Le soluzioni della (14) sono allora:

$$f_1(t) = k\,\varphi(t) + a + b - C$$

$$f_2(t) = (k/B)\,\varphi(t) + (a-C)/B$$

$$f_3(t) = (k/B)\,\varphi(t) + (b-C)/B$$

$$\phi(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y))$$

2° Caso. $A \neq 0$.

L'equazione (13) può scriversi :

$$f_1(\phi(x,y)) - C = \frac{(A\,f_2(x) + B)(A\,f_3(y) + B) - B^2}{A}$$

ovvero:

$$A\,f_1(\phi(x,y)) - AC = (Af_2(x) + B)\,(Af_3(y) + B) - B^2 \qquad (18)$$

Ponendo

$$Af_2(x) + B = g(x)$$

$$Af_3(y) + B = h(y)$$

$$Af_1(\phi(x,y)) - AC + B^2 = l(\phi(x,y))$$

la (18) diventa:

$$l(\phi(x,y)) = g(x)h(y) \qquad (19)$$

Ponendo x= e si ha:

$$l(y) = g(e)h(y)$$

ovvero:

$$h(y) = (1/a)l(y) \qquad \text{con } a = g(e)$$

Ponendo invece y= e risulta:

$$l(x) = g(x)h(e)$$

ovvero:

$$g(x) = (1/b)l(x) \qquad \text{con } b = h(e)$$

La (19) diventa allora

$$l(\phi(x,y)) = l(x)l(y)/ab \qquad (ab \neq 0) \qquad (20)$$

Ponendo ancora :

$$\chi(t) = ab\,l(t)$$

la (20) si può riscrivere:

$$\chi(\phi(x,y)) = \chi(x)\,\chi(y) \qquad (21)$$

Proviamo ora che χ può assumere soltanto valori positivi.

Prendendo x= e nella (21) riesce:

$$\chi(y) = \chi(e)\,\chi(y)$$

e perciò $\chi(e) = 1$. In almeno un punto dunque χ è positiva.

Mostriamo ora che non può cambiare segno. Vista la continuità , se χ cambiasse segno vi sarebbe un λ tale che $\chi(\lambda) = 0$. Ma allora dovrebbe essere:

$$\chi(\psi(\lambda, \lambda^{-1})) = \chi(\lambda)\chi(\lambda^{-1}) = 0$$

per la (21). E dovrebbe anche essere , visto che $\psi(\lambda, \lambda^{-1}) = e$:

$$\chi(\psi(\lambda, \lambda^{-1})) = \chi(e) = 1.$$

Non può esistere un tal λ e perciò χ è sempre positiva.

Ciò ci autorizza a prendere i logaritmi di entrami i membri della (21):

$$\varphi(\psi(x,y)) = \varphi(x) + \varphi(y) \tag{22}$$

con $\varphi(t) = \log \chi(t)$.

La (22) coincide con la (16) già discussa. Si deduce allora immediatamente che le soluzioni della (20) sono:

$$l(t) = a\, b \cdot \exp(k\, \varphi(t))$$

$$g(t) = a \exp(k\varphi(t))$$

$$h(t) = b \exp(k\varphi(t))$$

$$\psi(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y)).$$

con a, b , k, costanti arbitrarie e φ arbitraria funzione continua e strettamente monotona.

Per la (18) le soluzioni sono allora:

$$f_1(t) = (1/A)\{ ab\, e^{k\varphi(t)} + AC - B^2 \}$$

$$f_2(t) = (1/A)\{ a\, e^{k\varphi(t)} - B \}$$

$$f_3(t) = (1/A)\{ b\, e^{k\varphi(t)} - B \}$$

$$\psi(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y))$$

Facciamo infine osservare che l'equazione (12) da noi studiata è una generalizzazione delle equazioni studiate dai seguenti Autori:

a) Muliere (1984)

$$E\{ f(\psi(X,Y)) \} = T(E(f(X)), E(f(Y)))$$

b) Savage(1971)

$$E(f(X + Y)) = T(E(f(X)), E(f(Y)))$$

c) Castagnoli (1973/74)

$$E(f(\psi(X,Y))) = E(f(X))E(f(Y))$$

d) Peccati (1975)

$$E(\psi(X,Y)) = \psi(E(X), E(Y))$$

Mostriamo ora come dedurre i risultati ottenuti dagli Autori citati particolarizzando la soluzione da noi data.

Per ottenere i risultati di Muliere si può porre $f_1 = f_2 = f_3 = f$.

Se $A = 0$ allora deve essere $f_1 = f_2 = f_3 \Rightarrow B = 1$, poi $a + b - C = a - C = b - C \Rightarrow a = b = 0$. Questo implica : $f(t) = k\,\varphi(t) - C$.

Se $A \neq 0$ deve essere $(ab/A) = (a/A) = (b/A) \Rightarrow a = b = 1$, e $(CA - B^2)/A = -(B/A) \Rightarrow C = (B^2 - B)/A$ da cui $f(t) = (1/A)\exp(k\varphi(t)) - B/A$.

I risultati di Savage si ottengono ponendo $f_1 = f_2 = f_3 = f$ e $\psi(X,Y) = X+Y$

Questo implica $\varphi(t) = t$. Pertanto si hanno i risultati dati da Muliere dove invece di $\varphi(t)$ si ha t.

Per ottenere i risultati di Castagnoli basta porre $f_1 = f_2 = f_3 = f$ e $T(u,v) = uv$.

Questo implica $C = B = 0$ e $A = 1$. Pertanto il 1° Caso non può sussistere.

Nel secondo caso si ha: $f(t) = \exp(k\,\varphi(t))$.

I risultati di Peccati si ottengono ponendo $f_1 = f_2 = f_3 = f = I$ (funzione identità). Allora nel primo caso si ha: $T(u,v) = u + v + C$ e $\psi(x,y) = x+y+C$.

Nel secondo caso si ha: $T(u,v) = C + B(u + v) + A\,u\,v$ e $\psi(x,y) = C + B(x + y) + A\,xy$. Come si vede in ogni caso $T = \psi$ e $C = (B^2 - B)/A$.

4. CENNI AD ALCUNI PROBLEMI DI CARATTERIZZAZIONE.

Sono molti gli argomenti di teoria della probabilità il cui problema originale si riduce a determinare la soluzione o le soluzioni di una equazione funzionale. Uno dei temi in cui spesso la risoluzione di una equazione funzionale è determinante è quello della caratterizzazione di distribuzioni statistiche. I riferimenti principali sono i seguenti: Aczél(1966), Galambos e Kotz (1978) , Kagan,Linnik e Rao (1973), Lukacs e Laha(1964), Patil,Kotz e Ord (1975), Galambos (1982), Kotz (1974), Rao (1974).
L' equazione da noi studiata è una generalizzazione di molte equazioni funzionali presenti nei problemi di caratterizzazione.
A titolo di esempio desideriamo mettere in evidenza i legami esistenti tra l'equazione (13) e la classica proprietà di perdita di memoria. (si veda anche Castagnoli (1978), (1982) , Muliere (1984)).
Come è ben noto si dice che una v.c. X, non negativa, possiede la proprietà di perdita di memoria se

$$P(X \geqslant s + t \mid X \geqslant s) = P(X \geqslant t) \tag{23}$$

per ogni $s,t \geqslant 0$.
Ora, se $P(X \geqslant s) > 0$ per ogni $s \geqslant 0$, allora la (23) può essere scritta

$$G (s + t) = G(s)\, G(t) \tag{24}$$

dove $G(x) = 1 - F(x)$. (*)
La (24) è una caso particolare della (13) , basta porre $\phi(x,y) = x+y$, $f_1 = f_2 = f_3 = G$, $B = C = 0$, $A = 1$.
La (24) è suscettibile della seguente generalizzazione. La domanda che possiamo porci è : per quali altre operazioni $\phi(x,y)$ oltre all'addizione vale la (23), cioè per quali v.c. accade che:

(*) Se assumiamo che la (24) sia equivalente alla (23) per ogni $s,t \geqslant 0$ allora $G(t) > 0$ per ogni $t \geqslant 0$ e $F(x) = 1-G(x)$ è una f.r..

$$P(X \geqslant \phi(s,t) \mid X \geqslant s) = P (X \geqslant t) \tag{25}$$

La (25) può scriversi:

$$G(\phi(s,t)) = G(s)G(t) \tag{26}$$

Anche la (26) è un caso particolare dell'equazione da noi studiata ed ha soluzioni:

$$\phi(s,t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(t))$$

$$G(x) = \exp(k\varphi(x))$$

essendo $\varphi(x)$ una funzione continua e strettamente monotona che realizza l'operazione $\phi(x,y)$. $\varphi(x)$ deve essere scelta in modo che faccia sì che $F(x) = 1 - G(x)$ sia una f.r. A tal fine basta che $\varphi(0) = 0$ e che $k\varphi(x) \longrightarrow -\infty$ per $x \longrightarrow +\infty$.

E' immediato verificare che variando l'operazione $\phi(x,y)$ varia la distribuzione statistica che viene caratterizzata. (*)

1) $\varphi(x) = x \Rightarrow \phi(x,y) = x+y \Rightarrow F(x) = 1 - e^{kx}$ $(k < 0 , x \geqslant 0)$
cioè la distribuzione esponenziale.

2) $\varphi(x) = \log x \Rightarrow \phi(x,y) = xy \Rightarrow F(x) = 1- e^{k\log x} = 1 - x^k$ $(k < 0, x \geqslant 0)$
che è la distribuzione di Pareto.

3) $\varphi(x) = x^v \Rightarrow \phi(x,y) = (x^v + y^v)^{1/v} \Rightarrow F(x) = 1- e^{kx^v}$ $(k< 0, v > 1, x \geqslant 0)$
cioè la distribuzione di Weibull.

Una generalizzazione della (25) può essere la seguente. La domanda che ci poniamo è : per quali v.c. accade che

$$P(X \geqslant \phi(x,y) \mid X \geqslant x)$$

dipende solo da y, vale a dire:

(*) Facciamo osservare che conviene scegliere la funzione φ e chiedersi quale operazione $\phi(x,y)$ resta definita , piuttosto che partire da $\phi(x,y)$ e chiedersi quale deve essere la funzione φ corrispondente.

$$P(X \geqslant \phi(x,y) \mid X \geqslant x) = G_2(y) \qquad (27)$$

La (27) può essere scritta:

$$G_1(\phi(x,y)) = G_1(x)\, G_2(y) \qquad (28)$$

Anche la (28) è una caso particolare dell'equazione da noi studiata.
Fissata l'operazione $\phi(x,y)$ è immediato dedurre la forma di G_1 e G_2.
La forma di G_1 e G_2 è :

$$G_1 = a\, e^{k\,\varphi(x)}$$

$$G_2 = e^{k\,\varphi(x)}$$

Evidentemente $F(x) = 1 - G_1$ deve essere una f.r.

Procedendo ora come nel caso precedente è facile verificare che si ottengono le stesse distribuzioni eventualmente traslate.
La proprietà di perdita di memoria può essere generalizzata anche in altri modi, in tutti però si ricade in una equazione funzionale che è un caso particolare della (13).
Galambos e Kotz (1978) hanno unificato molte caratterizzazioni della distribuzione esponenziale mostrando le relazioni esistenti tra una data caratterizzazione e l'equazione (24).
Altri casi in cui l'equazione (24) è presente sono:
a) caratterizzazioni basate sull'indipendenza di alcune funzioni di statistiche d'ordine (Galambos e Kotz , 1978, pp. 46 -47)

b) caratterizzazione del processo di Poisson (Galambos e Kotz , 1978, pp. 72 -73)
c) teoremi limite (Aczél , 1966, pag. 109)

Per i casi in cui (1- G(x)) è assunta funzione di ripartizione si veda per la discussione e le referenze (Galambos e Kotz , 1978, Sez. 2.1)

Per i casi dove (1 - G(x)) non è una f.r. si veda Patil e Seshadri (1964), Aczél (1975), Berk (1977).
Il problema in cui s o t nella (24) vengono considerati v.c. è affrontato da Galambos e Kotz (1978), Ramachandran (1977), Shimizu (1978).
L'equazione funzionale

$$G_1(x + t) = G_2(x)\, G_3(y)$$

(che è ancora un caso particolare della nostra) si trova nei problemi di caratterizzazione affrontati da Patil e Seshadri (1964), Menon (1966), Janardan (1975).

5. CONSIDERAZIONI FINALI.

Il presente lavoro, come è stato messo in evidenza in premessa, non esaurisce le problematiche attinenti all'argomento trattato.
Pensiamo infatti che, oltre alle linee di sviluppo in precedenza enunciate, il risultato qui stabilito possa essere facilmente generalizzabile al caso dei vettori aleatori ed ad altri tipi di funzionali.
Ci proponiamo perciò di tornare in futuro su questi aspetti che potrebbero riuscire interessanti non soltanto in connessione al tema qui trattato.

BIBLIOGRAFIA

J. Aczél, (1966), Lectures on Functional Equations and their Applications, Academic press, New York.

J. Aczél, (1975), General solution of a functional equation connected with a characterization of statistical distributions. In Statistical Distributions in Scientific Work, Proc. NATO Advanced Study Institute, Univ. of Calgary, Calgary, 1974, vol.3, D. Reidel, Dordrecht, pp. 47- 55

R. H. Berk,(1977), Characterizations via conditional distributions, J. Appl. Probab. , 14, pp. 806-816.

E. Castagnoli, (1973/74), Sulle trasformate delle funzioni di ripartizione di variabili casuali, Studi e Ricerche X/XI, pp.3 -13.

E. Castagnoli, (1978), Sulle operazioni associative tra variabili casuali, Rivista di Matematica per Le Scienze Economiche e Sociali, 2, pp. 67 -80.

E. Castagnoli, (1982), Su una generalizzazione dell'equazione funzionale di Pexider e su alcune sue applicazioni, Atti giornate di lavoro AIRO, pp. 312 - 322.

J. Galambos e S. Kotz, (1978), Characterizations of Probability Distributions, Lecture Notes in Mathematics v. 675, Springer, Heidelberg.

J. Galambos, (1982), The role of functional equation in stochastic model building, Aequationes Mathematicae, 25, pp. 21- 41.

K.G. Janardan, (1975), Characterizations of certain discrete distributions. In Statistical Distributions in Scientific Work. Proc. NATO Advanced Study Institute, Univ. of Calgary, Calgary, 1974, vol. 3, D. Reidel, Dordrecht, pp. 359-364.

A.M. Kagan, Yu.V. Linnik e C.R. Rao ,(1973), Characterizations Problems in Mathematical Statistics, J. Wiley, New York.

S. Kotz, (1974), Characterizations of statistical distributions: a supplement to recent surveys. Internat. Statist. Rev. , 42,pp. 39-65.

E. Lukacs e R.G. Laha, (1964), Applications of Characteristic Functions, Mafner, New York.

M.V. Menon,(1966), Characterization theorem for some univariate probability distributions, J. Roy. Statist. Soc. Ser.B , 28,pp. 143-145.

P. Muliere, (1984), Una nota su operazioni associative, trasformate integrali e problemi di caratterizzazione in Statistica, Istituto di Matematica finanziaria, Univ. Parma, ser.II, n. 20.

G.P. Patil e V. Seshadri , (1964), Characterization theorems for some univariate probability distributions, J. Roy. Statist. Soc. Ser.B. 26,pp. 286-292.

G.P. Patil, S.Kotz e J.K. Ord, (1975), Statistical Distribution in Scientific Work, Proceedings of the conference on characterizations, Calgary , vol. 3, D. Reidel, Dordrecht.

L. Peccati, (1975), Valor medio e operazioni associative, Studi e Ricerche , XII, pp. 181-194.

B. Ramachandran ,(1977), On the strong Markov property of the exponential laws. In Analytic Function Methods in Probability Theory (1980), North-Holland, Amsterdam, pp. 277-292.

C.R. Rao ,(1974), Functional equations and characterizations of probability distributions. In Proc. Internat. Congress of Mathematicians, Vancouver, 1974, vol.2, 1975, pp. 163- 168.

L.J. Savage,(1971) The characteristic function characterized and the momentousness of moments, In Studi di Probabilità e Ricerca Operativa in onore di G. Pompilj, Tipografia Oderisi, Gubbio, pp. 131-141.

R. Shimizu,(1978), Solution to a functional equation and its applications to some characterization problems, Sankhya, ser. A, 40, pp. 319-332.