UNIVERSITA' DI PAVIA
Facoltà di Economia e Commercio

PIETRO MULIERE

Sulla convergenza locale alla densità normale per somme di numeri aleatori scambiabili aventi distribuzione di probabilità a forma reticolare.

Fascicoli dell'Istituto
di Matematica Generale e Finanziaria
n. 64
Anno Accademico 1980-81

Pervenuto in redazione nell'ottobre 1981

Finito di stampare nel dicembre 1981
dalla SE.A.G. Servizio Arti Grafiche
Via S.Fermo 1 - 27100 Pavia - Tel.303466

SULLA CONVERGENZA LOCALE ALLA DENSITA' NORMALE PER SOMME DI NUMERI ALEATORI SCAMBIABILI AVENTI DISTRIBUZIONE DI PROBABILITA' A FORMA RETICOLARE. (*)

PIETRO MULIERE (**)

In questa nota viene presentata una condizione affinché valga la convergenza locale verso la gaussiana nel caso di numeri aleatori scambiabili aventi distribuzione di probabilità a forma reticolare (lattice distributions).

1. Considerazioni preliminari.

In un nostro precedente lavoro [1] abbiamo presentato una condizione necessaria e sufficiente affinché valga la convergenza locale verso la gaussiana nel caso di numeri aleatori (n.a.) scambiabili dotati di densità. In questa nota, vogliamo occuparci della convergenza locale verso la gaussiana della legge di probabilità di

$$Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i - n\,m \right\} ,$$

$n = 1,2, \ldots$, essendo $m = E(X_i) < \infty$, $0 < \sigma^2 = Var(X_i) < \infty$, $i = 1,2,\ldots$ nella ipotesi che X_i siano n.a. scambiabili aventi distribuzione a forma reticolare.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del GNAFA — C.N.R.

(**) Istituto di Scienze Economiche e Statistiche — Università degli Studi di Pavia.

Prima di passare all'enunciazione del risultato, ricordiamo alcune definizioni e proposizioni riguardanti le distribuzioni reticolari (si veda : V.V.Petrov [2], B.V. Gnedenko – A.N.Kolmogorov [3]).

DEFINIZIONE 1. *Un n.a. X possiede distribuzione reticolare se con probabilità 1 assume valori della forma* $a + kh$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ *dove* a *ed* $h > 0$ *sono costanti.*

La quantità h è detta intervallo (span) della distribuzione. Se non vi sono numeri a_1 e $h_1 > h$ tali che tutti i valori assunti dalla distribuzione sono della forma $a_1 + kh_1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) con probabilità 1 allora l'intervallo h è massimo. Condizione necessaria e sufficiente affinché h sia massimo è la seguente :

DEFINIZIONE 2. *h è massimo se e solo se è tale per cui il massimo comun divisore delle differenze tra i valori di X diviso per h è uguale ad uno.*

Una distribuzione reticolare può essere caratterizzata altresì dalla seguente:

PROPOSIZIONE 1. *Una distribuzione con funzione caratteristica* $\varphi(t)$ *è una distribuzione reticolare se e solamente se esiste un* $t_0 \neq 0$ *taleche* $|\varphi(t_0)| = 1$.

Se $\varphi(t)$ è la funzione caratteristica (f.c.) di una distribuzione reticolare con intervallo h allora $|\varphi(t)|$ è periodica con periodo $2\pi/h$. Ne discende che l'intervallo h sarà massimo se e solamente se $|\varphi(\frac{2\pi}{h})| = 1$ ed $|\varphi(t)| < 1$ nell'intervallo

$0 < t < \frac{2\pi}{h}$.

PROPOSIZIONE 2. *Se* $\varphi(t)$ *è la f.c. di una distribuzione reticolare con h massimo allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un* $c > 0$ *tale che* $|\varphi(t)| \leqslant e^{-c}$ *nell'intervallo* $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant 2\pi/h - \varepsilon$.

Ricordiamo ,ora, un risultato inerente il teorema di inversione delle f.c.

Sia

$$p_k = P(X = a + kh),$$

allora

$$p_k = \frac{h}{2\pi} \int_{|t|<\pi/h} e^{-it(a+kh)} \varphi(t)\, dt$$

per ogni intero k , dove $\varphi(t)$ è la f.c. del n.a. X.

Nel caso di indipendenza stocastica dei n.a. X_i condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza locale si possono trovare esposte nel classico volume di B.V.Gnedenko-A.N. Kolmogorov ([3] § 49)

Per l'uso che ne faremo in seguito , giova ricordare che J.R.Blum,H.Chernoff, M.Rosenblatt e H.Teicher ([4] pag.222) hanno dimostrato in ipotesi di scambiabilità, un risultato relativo alla convergenza integrale:

Se X_n *è una successione di n.a. scambiabili , dotati di media e varianza finita :* m, σ^2, *allora*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant z \right\} = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dz \qquad , \forall x \in \mathbb{R}$$

se e solo se $\mu(\mathcal{F}_{m,\sigma^2}) = 1$ *, essendo* $\mathcal{F}_{m,\sigma^2}$ *la sottoclasse di* $\mathcal{F}$ *caratterizzata dal fatto che tutte le sue f.r. hanno media uguale ad m e varianza uguale a* $\sigma^2 > 0$ *.*

2. La convergenza locale nel caso di distribuzioni reticolari.

Consideriamo una classe di f.r. unidimensionali $\mathcal{F}$ con elementi F aventi distribuzione reticolare. I n.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$, subordinatamente ad F siano mutuamente indipendenti ed identicamente distribuiti.

Indichiamo con $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$ la classe di f.r. tale che :

i) $\int_{\mathbb{R}} x dF(x) = m$; $\int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 dF(x) = \sigma^2$ per ogni $F \in \mathcal{F}^*$,

ii) h è massimo per ogni $F \in \mathcal{F}^*$.

E'immediato giustificare le seguenti relazioni:

$$\varphi_F(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} p_{kF}\, e^{iat+itkh} = e^{iat} \sum_{K=-\infty}^{\infty} p_{kF}\, e^{itkh} ,$$

per ogni $F \in \mathfrak{F}^*$, essendo p_{kF} la probabilità che F assegna al numero $a + kh$;

$$\varphi^n_F(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} P_{nF}(k)\, e^{itkh}\, e^{iant} \qquad \text{per ogni } F \in \mathfrak{F}^*$$

essendo $P_{nF}(k)$ la probabilità che $F^{*(n)}$ assegna al numero $an+kh$.

Indicata con $\mathcal{B}$ la classe di Borel di sottoinsiemi di $\mathfrak{F}^*$ generata dalla classe di insiemi

$$\mathfrak{F}(x,y) = \{ F \in \mathfrak{F}^* \mid F(x) \leq y \}$$

con x e y reali assegnati, diremo che $\{X_n\}$ è un processo scambiabile se e solo se esiste una misura di probabilità μ definita su $\mathcal{B}$ tale che

$$P(B) = \int_{\mathfrak{F}^*} P_F(B)\, d\mu(F)$$

con B elemento della classe di Borel costruita sullo spazio campionario della successione $\{X_n\}$ ed essendo $P_F(B)$ la probabilità di B calcolata nell'ipotesi che i n.a. X_n siano mutuamente indipendenti e somiglianti con f.r. F (si veda B. de Finetti [5]).

Posto,ora, in ipotesi di scambiabilità

$$P_n(k) = P\Big\{ \sum_{i=1}^{n} X_i = an + kh \Big\}$$

si ha :

$$P_n(k) = \int_{\mathfrak{F}^*} P_F \Big\{ \sum_{i=1}^{n} X_i = an + kh \Big\}\, d\mu(F) =$$

$$= \int_{\mathfrak{F}^*} P_{nF}(k)\, d\mu(F) .$$

Nel seguito utilizzeremo la seguente :

$$\varphi^{\bullet}_F(t) = \varphi_F(t)\, e^{-ita}$$

Possiamo enunciare ,ora, il seguente teorema :

TEOREMA.

Se $\{X_n\}$ è un processo scambiabile i cui elementi hanno funzione di ripartizione reticolare con $E(X_i) = m < \infty$, $Var(X_i) = \sigma^2 > 0$ allora condizione necessaria e sufficiente affinché riesca

$$\lim_{n \to \infty} \Big\{ \frac{\sigma \sqrt{n}}{h} P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2_{nk}} \Big\} = 0$$

con

$$z_{nk} = \frac{an + kh - nm}{\sqrt{n}} , \quad a \text{ reale}$$

è che sulla classe $\mathfrak{F}^*$, μ concentri probabilità unitaria , $\mu(\mathfrak{F}^*) = 1$.

dimostrazione.

La condizione è sufficiente.

Per la dimostrazione dobbiamo studia re il comportamento della differenza

$$R_n = 2\pi \Big\{ \frac{\sigma \sqrt{n}}{h} P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2_{nk}} \Big\}$$

essendo z_{nk} il simbolo definito in precedenza.

Il teorema di inversione delle funzioni caratteristiche porge :

$$\frac{2\pi\sigma\sqrt{n}}{h} P_{nF}(k) = \int_{-\frac{\pi\sigma\sqrt{n}}{h}}^{\frac{\pi\sigma\sqrt{n}}{h}} e^{-iz_{nk}t}\, \varphi^{\bullet n}_F\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big) dt \tag{1}$$

di conseguenza in forza della condizione $\mu(\mathfrak{F}^*) = 1$ si ha :

$$R_n = \int_{\mathfrak{F}^*} \Big\{ \int_{-\frac{\pi\sigma\sqrt{n}}{h}}^{\frac{\pi\sigma\sqrt{n}}{h}} e^{-iz_{nk}t}\, \varphi^{\bullet n}_F\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\Big) dt - \int_{R} e^{-t^2/2 - iz_{nk}t} dt \Big\}\, d\mu(F) \tag{2}$$

La (1) può essere scritta nel modo seguente :

$$\frac{2\pi\sigma\sqrt{n}}{h}\, P_n(k) = \int_{-A}^{A} e^{-iz_{nk}t}\,\varphi_F^{*n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt \;+$$

$$+\; \delta_{nF}\int_{A\le|t|\le\varepsilon_F\sigma\sqrt{n}} e^{-iz_{nk}t}\,\varphi_F^{*n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt \;+$$

$$+\int_{g_{nF}\le|t|\le\frac{\pi\sigma\sqrt{n}}{h}} e^{-iz_{nk}t}\,\varphi_F^{*n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt$$

essendo

$$\delta_{nF} = \begin{cases} 0 & \text{se } \varepsilon_F\,\sigma\sqrt{n}\le A \\ 1 & \text{se } \varepsilon_F\,\sigma\sqrt{n} > A \end{cases} \quad ; \qquad g_{nF} = \begin{cases} A & \text{se } \varepsilon_F\,\sigma\sqrt{n}\le A \\ \varepsilon_F\,\sigma\sqrt{n} & \text{se } \varepsilon_F\,\sigma\sqrt{n} > A \end{cases} .$$

Di conseguenza la (2) diventa :

$$R_n = \int_{\mathfrak{F}^*} I_{1F}\, d\mu(F) + \int_{\mathfrak{F}^*} I_{2F}\, d\mu(F) + \int_{\mathfrak{F}^*} I_{3F}\, d\mu(F) + \int_{\mathfrak{F}^*} I_{4F}\, d\mu(F) \quad , \qquad (3)$$

dove

$$\int_{\mathfrak{F}^*} I_{1F}\, d\mu(F) = \int_{\mathfrak{F}^*}\left\{ \int_{-A}^{A} e^{-izt}\left(\varphi_F^{*n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2}\right) dt \right\} d\mu(F)$$

$$\int_{\mathfrak{F}^*} I_{2F}\, d\mu(F) = -\int_{\mathfrak{F}^*}\left\{ \int_{|t|>A} e^{-izt-t^2/2}\, dt \right\} d\mu(F)$$

$$\int_{\mathfrak{F}^*} I_{3F}\, d\mu(F) = \int_{\mathfrak{F}^*}\left\{ \delta_{nF}\int_{A\le|t|\le\varepsilon_F\sigma\sqrt{n}} e^{-izt}\,\varphi_F^{*n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt \right\} d\mu(F)$$

$$\int_{\mathfrak{F}^*} I_{4F}\, d\mu(F) = \int_{\mathfrak{F}^*}\left\{ \int_{g_{nF}\le|t|\le\frac{\pi\sigma\sqrt{n}}{h}} e^{-izt}\,\varphi_F^{*n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt \right\} d\mu(F) .$$

Mostriamo ora che gli integrali che compaiono nella (3) convergono a zero per $n \to \infty$.

$$\left| \int_{\mathfrak{F}^*} I_{1F}\, d\mu(F) \right| \le \int_{-A}^{A} \left| \int_{\mathfrak{F}^*} \left(\varphi_F^{*n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2}\right) d\mu(F) \right| dt$$

per la condizione del teorema avremo che

$$= \int_{-A}^{A} \left| \varphi_F^{*n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2} \right| dt .$$

Per il teorema citato di Blum,Chernoff,Rosenblatt,Teicher e per il teorema di continuità sulle funzioni caratteristiche si ricava che tale integrale tende a zero per $n \to \infty$.

$$\left| \int_{\mathfrak{F}^*} I_{2F}\, d\mu(F) \right| \le \int_{|t|>A} e^{-t^2/2}\, dt$$

tale integrale può essere reso arbitrariamente piccolo in modulo , a patto di prendere A sufficientemente grande.

Ricordando ,ora, che per ogni $F \in \mathfrak{F}^*$ è possibile determinare un $\varepsilon_F > 0$ in modo che risulti

$$|\varphi_F^{*}(t)| \le e^{-t^2/4}$$

si ha

$$\left| \int_{\mathfrak{F}^*} I_{3F}\, d\mu(F) \right| \le 2\int_{A}^{\varepsilon_F\sigma\sqrt{n}} \left| \varphi_F^{*}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right|^n dt \le 2\int_{A}^{\varepsilon_F\sigma\sqrt{n}} e^{-t^2/4}\, dt <$$

$$< 2\int_{A}^{\infty} e^{-t^2/4}\, dt < 4/A\; e^{-A^2/4}$$

basta quindi prendere A sufficientemente grande per rendere l'integrale sufficientemente piccolo.

Rimane , infine, da mostrare che l'integrale

$$\left| \int_{\mathfrak{F}^*} I_{4F}\, d\mu(F) \right| = \int_{\mathfrak{F}^*}\left\{ \int_{g_{nF}\le|t|\le\frac{\pi\sigma\sqrt{n}}{h}} e^{-izt}\,\varphi_F^{*n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt \right\} d\mu(F)$$

tende a zero per $n \to \infty$.

Posto $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} = x$ e prendendo il modulo avremo che tale integrale è

$$\int_{\mathcal{J}^*}\left\{\int_{\varepsilon_F \le |x| \le \frac{\pi}{h}} |\varphi_F^*(x)|^n \sqrt{n}\; dx\right\} d\mu(F)$$

La proposizione 2 ci permette di dire che per $F \in \mathcal{J}^*$ è possibile determinare un u_F tale che

$$\sup_{\varepsilon_F \le |x| \le \frac{\pi}{h}} (|\varphi_F^*(x)|) = u_F < 1 .$$

Se poniamo

$$H(z) = \mu\left\{\sup_{\varepsilon_F \le |x| \le \frac{\pi}{h}} |\varphi_F^*(x)| \le z\right\},$$

avremo

$$\sqrt{n}\int_{\mathcal{J}^*}\left\{\int_{\varepsilon_F \le |x| \le \frac{\pi}{h}} |\varphi_F^*(x)|^n\, dx\right\} d\mu(F) \le$$

$$\le \sqrt{n}\int_{\mathcal{J}^*} \frac{2\pi}{h}\, u_F^n\, d\mu(F) = \frac{2\pi}{h}\sqrt{n}\int_0^1 z^n\, dH(z) .$$

Rimane infine da mostrare che tale integrale tende a zero per $n \to \infty$. Si ha

$$\frac{2\pi}{h}\sqrt{n}\int_0^1 z^n dH(z) = \frac{2\pi}{h}\sqrt{n}\left\{\int_0^{1-\varepsilon_n} z^n dH(z) + \int_{1-\varepsilon_n}^1 z^n dH(z)\right\} .$$

Posto $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n^{1/2+\alpha}}$ $\qquad 0 < \alpha < 1/2$

avremo che

$$0 \le 2\pi/h\,\sqrt{n}\int_{1-\varepsilon_n}^1 z^n dH(z) \le 2\pi/h\;\varepsilon_n\sqrt{n}$$

e $\lim\limits_{n\to\infty} 2\pi/h\;\varepsilon_n\sqrt{n} = 0 .$

Ancora

$$0 \le 2\pi/h\,\sqrt{n}\int^{1-\varepsilon_n} z^n dH(z) \le 2\pi/h\,\sqrt{n}\,(1-\varepsilon_n)^n$$

e

$$\lim_{n\to\infty} 2\pi/h\,\sqrt{n}\,(1-\varepsilon_n)^n = 0 .$$

Abbiamo così mostrato che la condizione $\mu(\mathcal{J}^*) = 1$ è sufficiente per la convergenza locale.

La condizione è necessaria.

La verifica della necessità della condizione è immediata e si evince dal già citato teorema di Blum,Chernoff, Rosenblatt, Teicher . Il teorema è così dimostrato.

BIBLIOGRAFIA.

[1] P. Muliere (1981), *Un teorema limite locale per somme di numeri aleatori scambiabili.* In pubblicazione su " Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali ".

[2] V.V. Petrov (1975), *Sums of Indipendent Random Variables* , Springer–Verlag.

[3] B.V.Gnedenko–A.N.Kolmogorov (1954), *Limit distributions for sums of indipendent random variables,* Addison–Wesley Publishing Company.

[4] J.R.Blum,H.Chernoff,M.Rosenblatt,H.Teicher (1958), *Central limit theorems for interchangeable processes,* Canadian J. Math. X , pag. 222– 229.

[5] B. de Finetti (1937), *La Prévision,ses lois logiques, ses sources subjectives,* Annales de l'Institut H. Poincaré 7 (1) , pag 1–68.

SUMMARY

The purpose of the present note is to exhibit a necessary and sufficient condition under which a local limit theorem holds for some classes of exchangeable lattice random variables.