UNO SCHEMA D'URNA PER IL PROCESSO BETA-STACY

An Urn Scheme for the Beta-Stacy Process

PIETRO MULIERE
PIERCESARE SECCHI
Dipartimento di Economia Politica e Metodi Quantitativi
Università degli Studi di Pavia

ESTRATTO

ATTI DELLA
XXXIX RIUNIONE SCIENTIFICA
SORRENTO, 14 - 17 APRILE 1998

ISTITUTO DI STATISTICA E MATEMATICA
ISTITUTO UNIVERSITARIO NAVALE

CON IL PATROCINIO
DELLA REGIONE CAMPANIA

ATTI DELLA
XXXIX RIUNIONE SCIENTIFICA
SORRENTO, 14 - 17 APRILE 1998

Supplemento alla Rivista di
Scritti di Statistica Economica
Serie Quaderni di Discussione
(e Raccolta di Scritti di Statistica economica)
Serie Quaderni di Didattica
Serie Altre Pubblicazioni

La presente pubblicazione è stata finanziata dal Consiglio Nazionale delle Ricerche (C.N.R.), Contributo n. AI98.00606.10

Direttore responsabile: prof. Claudio Quintano
Iscrizione nell'Elenco speciale annesso all'Albo dei Giornalisti della Campania del 02.12.1996 e registrato presso il Tribunale di Napoli il 10.03.97, n. 4855.

Direzione e Redazione: Istituto di Statistica e Matematica
Istituto Universitario Navale
Via De Gasperi, 5
80133 - Napoli
tel: +39 (081) 5522588
fax: +39 (081) 5516675
e-mail: quintano@nava3.uninav.it

Finito di stampare nel mese di luglio 1999

UNO SCHEMA D'URNA PER IL PROCESSO BETA-STACY

An Urn Scheme for the Beta-Stacy Process

PIETRO MULIERE
PIERCESARE SECCHI
Dipartimento di Economia Politica e Metodi Quantitativi
Università degli Studi di Pavia

1. Introduzione

I procedimenti disponibili in letteratura per la costruzione di misure di probabilità aleatorie sono numerosi ed ogni procedimento possiede vantaggi e svantaggi. Uno schema dal sapore molto probabilistico è quello basato sulle urne di Pólya; è questo l'approccio seguito da Blackwell e MacQueen (1973) per la costruzione del processo di Dirichlet, da Mauldin, Sudderth e Williams (1992) per la costruzione dei Pólya trees e da Walker e Muliere (1997) per quella del processo beta-Stacy. Quest'ultimo processo è di particolare interesse dal momento che molti, se non tutti, i processi neutrali a destra usati nella pratica statistica bayesiana possono essere considerati come suoi casi particolari.

Recentemente Muliere, Secchi e Walker (1998) hanno introdotto una classe di passeggiate aleatorie rinforzate su uno spazio discreto di urne di Pólya. Per la costruzione di questa classe di processi aleatori, detti RUP (*reinforced urn processes*), da un lato si fa riferimento alla medesima idea che genera le urne di Pólya e dall'altro ci si ispira alla nozione di passeggiata aleatoria rinforzata introdotta da Coppersmith e Diaconis (1986). Lo scopo di questa nota è quello di generare il processo beta-Stacy per mezzo di un particolare RUP.

Nel prossime pagine costruiremo una passeggiata aleatoria rinforzata $\{X_n\}$ su uno spazio discreto di urne di Pólya che contengono due soli colori. Dopo aver determinato la legge del processo $\{X_n\}$ ed aver mostrato la sua parziale scambiabilità, individueremo una condizione necessaria e sufficiente affinchè il processo sia ricorrente. Ricorrenza e parziale scambiabilità implicano che $\{X_n\}$ sia una mistura di catene di Markov nel senso di Diaconis e Freedman (1980). Mostremo che il processo $\{X_n\}$, quando è ricorrente, genera una successione scambiabile la cui misura di de Finetti è un processo beta-Stacy.

2. Una passeggiata aleatoria rinforzata su urne di Pólya

Sia $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ l'insieme degli interi non negativi e, per ogni $j \in S$, sia $U(j)$ un'urna di Pólya contenente palline di due diversi colori, diciamo nere e bianche; il numero iniziale di palline bianche in $U(j)$ è $q_j \geq 0$ mentre il numero iniziale di palline nere è $p_j \geq 0$. Assumiamo che $q_0 = 0$, mentre $q_j > 0$, per ogni $j \geq 1$.

Definiamo ricorsivamente una passeggiata aleatoria rinforzata $\{X_n\}$ su S nel modo seguente. Fissiamo $X_0 = 0$. Per ogni $n \geq 1$, se $X_{n-1} = j \in S$, estraiamo in modo casuale una pallina dall'urna $U(j)$ e ivi la reimettiamo insieme ad un'altra pallina dello stesso colore. Se la pallina estratta è bianca, poniamo $X_n = 0$, altrimenti poniamo $X_n = j + 1$.

Si noti che la definizione del processo $\{X_n\}$ ha senso anche quando le quantità q_j e p_j sono numeri reali non negativi che soddisfano i vincoli descritti in precedenza; infatti, immaginare che essi siano interi ha il solo vantaggio di rendere più facile la descrizione fisica del processo.

Osservazione 2.1. Se $p_j = 0$ per alcuni $j \geq 1$, sia $N = \min\{j \geq 1 : p_j = 0\}$. Allora, con probabilità uno, il processo $\{X_n\}$ visita solamente gli stati $\{0, \ldots, N\}$.

Sia σ una successione finita di elementi di S e, per ogni $i, j \in S$, indichiamo con $t_{i,j}$ il numero di transizioni in σ dallo stato i allo stato j. Diremo che σ è *ammissibile* se inizia con 0 ed è tale che $t_{0,0} = 0$ e, per ogni $i \in S$, $t_{i,j} = 0$ se j è diverso da 0 o da $i + 1$. Ovvero dallo stato 0 è ammessa la sola transizione allo stato 1, mentre da ogni altro stato sono ammesse solo transizioni a 0 oppure allo stato successivo.

Il prossimo teorema descrive la legge del processo $\{X_n\}$.

Teorema 2.1. *Per ogni $n \geq 0$ e $(x_0, \cdots, x_n) \in S^{n+1}$, $P[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] = 0$ se $(x_0, \ldots, x_n)$ non è ammissibile; altrimenti*

$$P[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{B(q_j + t_{j,0}, p_j + t_{j,j+1})}{B(q_j, p_j)} \tag{1}$$

dove, per ogni $a, b > 0$, $B(a, b)$ è la usuale funzione Beta.

Dimostrazione. Se $(x_0, \ldots, x_n) \in S^{n+1}$ è ammissibile,

$$\begin{aligned} &P[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] \\ &\quad = \frac{\prod_{j=0}^{t_{1,0}-1}(q_1 + j) \prod_{k=0}^{t_{1,2}-1}(p_1 + k)}{\prod_{i=0}^{t_{1,\cdot}-1}(q_1 + p_1 + i)} \cdots \frac{\prod_{j=0}^{t_{n-1,0}-1}(q_{n-1} + j) \prod_{k=0}^{t_{n-1,n}-1}(p_{n-1} + k)}{\prod_{i=0}^{t_{n-1,\cdot}-1}(q_{n-1} + p_{n-1} + i)} \end{aligned} \tag{2}$$

dove, per ogni $j \in S$, abbiamo posto $t_{j,\cdot} = t_{j,0} + t_{j,j+1}$ e inoltre abbiamo assunto per convenzione di scrittura che $\prod_0^{-1} = 1$.

È facile verificare che $P[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] = 0$ quando $(x_0, \ldots, x_n)$ non è ammissibile.

Un'immediata conseguenza del teorema è che la successione $\{X_n\}$ è parzialmente scambiabile secondo la definizione di Diaconis e Freedman (1980). Ricordiamo che due successioni finite σ e ϕ di elementi di S si dicono *equivalenti* se iniziano con lo stesso elemento e, per ogni $i, j \in S$, il numero di transizioni da i a j è lo stesso in entrambe le successioni. Ad esempio, $\sigma = (0,1,2,3,0,1,2,0)$ è equivalente a $\phi = (0,1,2,0,1,2,3,0)$.

La successione $\{X_n\}$ è *parzialmente scambiabile* se

$$P[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] = P[X_0 = y_0, \ldots, X_n = y_n]. \tag{3}$$

per ogni $n \geq 0$ e per tutte le successioni finite equivalenti $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ e $\phi = (y_0, \ldots, y_n)$ di elementi di S.

Corollario 2.1. *La successione $\{X_n\}$ è parzialmente scambiabile.*

Dimostrazione. Sia $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ una successione di elementi di S. Il Teorema 2.1. implica che $P[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n]$ dipenda solo dal primo elemento di σ e dal numero di transizioni $t_{i,j}$ in σ dallo stato i allo stato j, qualunque siano $i, j \in S$. Pertanto se $\phi = (y_0, \ldots, y_n)$ è equivalente a σ la condizione (3) è certamente soddisfatta.

Consideriamo la successione di tempi d'arresto $\{\tau_n\}$ definita ponendo $\tau_0 = 0$ e, per ogni $n \geq 1$, $\tau_n = \inf\{k > \tau_{n-1} : X_k = 0\}$. Diremo che il processo $\{X_n\}$ è ricorrente se $P\{X_n = 0 \text{ per infiniti } n\} = 1$ o, in modo equivalente, se $P[\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\tau_n < \infty\}] = 1$.

Il nostro prossimo obiettivo è quello di determinare una condizione necessaria e sufficiente affinchè la successione $\{X_n\}$ sia ricorrente. Per ogni $n \geq 1$, definiamo $T_n = X_{\tau_n - 1}$; la successione $\{T_n\}$ descrive gli stati che vengono visitati dalla successione $\{X_n\}$ immediatamente prima che avvenga un ritorno a 0. In maniera del tutto equivalente, per ogni $n \geq 1$, T_n misura la lunghezza della successione di stati strettamente compresi tra l'n-esimo 0 e l'$(n+1)$-esimo 0 nella successione $\{X_n\}$.

Teorema 2.2. *La successione $\{X_n\}$ è ricorrente se, e solo se,*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} \frac{p_i}{p_i + q_i} = 0. \tag{4}$$

Dimostrazione. Per ogni $n \geq 1$,

$$P[\tau_1 > n] = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{p_i}{p_i + q_i}. \tag{5}$$

Pertanto, $P[\tau_1 < \infty] = 1$ se è verificata la (4) .

Assumiamo che per un $n \geq 1$, $P[\bigcap_{i=1}^{n}\{\tau_i < \infty\}] = 1$. Allora

$$\begin{aligned} &P[\tau_{n+1} < \infty] \\ &\quad = \int_{\bigcap_{i=1}^{n}\{\tau_i < \infty\}} P[\tau_{n+1} < \infty | T_1, \ldots, T_n] dP \\ &\quad = \int_{\bigcap_{i=1}^{n}\{\tau_i < \infty\}} (1 - \lim_{k\to\infty} P[\tau_{n+1} > k | T_1, \ldots, T_n]) dP. \end{aligned} \tag{6}$$

D'altra parte, per $k > max(T_1, \ldots, T_n) + 1 = l$,

$$P[\tau_{n+1} > k | T_1, \ldots, T_n] \leq \prod_{j=l}^{k-1} \frac{p_j}{p_j + q_j} \tag{7}$$

e quest'ultima quantità converge a 0 per $k \to \infty$ grazie alla (4). Dunque $P[\tau_{n+1} < \infty] = 1$ e questo dimostra, per induzione su n, che la (4) è una condizione sufficiente per la ricorrenza di $\{X_n\}$.

Per dimostrare che la condizione è anche necessaria, si noti che $P[\tau_1 < \infty] = 1$ se $\{X_n\}$ è ricorrente. Da ciò consegue che

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{i=0}^{n} \frac{p_i}{p_i + q_i} = \lim_{n \to \infty} P[\tau_1 > n] = 0. \tag{8}$$

Poichè $\{X_n\}$ è parzialmente scambiabile, il Teorema 7 di Diaconis e Freedman (1980) implica che il processo sia una mistura di catene di Markov quando è ricorrente. Ovvero esiste una misura μ sull'insieme $\mathcal{P}$ delle matrici stocastiche definite su $S \times S$ tale che, per ogni $n \geq 0$ e ogni $(x_0, \ldots, x_n) \in S^{n+1}$,

$$P[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] = \int_{\mathcal{P}} \prod_{j=0}^{n-1} \pi(x_j, x_{j+1}) \mu(d\pi). \tag{9}$$

Osservazione 2.2. Quando è ricorrente, il processo $\{X_n\}$ illustra il legame tra la nozione di scambialità parziale di Diaconis e Freedman e quella di de Finetti (1938). Infatti, fissato $j \in S, j \leq N$, sia $\{\tau_n^{(j)}\}$ la successione dei tempi d'arresto tali che $\tau_0^{(j)} = \inf\{n \geq 0 : X_n = j\}$ e $\tau_n^{(j)} = \inf\{n > \tau_{n-1}^{(j)} : X_n = j\}$ per $n \geq 1$; è allora facile verificare che $P[\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\tau_n^{(j)} < \infty\}] = 1$ e che è scambiabile la successione $\{Y_n^{(j)}\}$ il cui elemento n-esimo, per $n = 0, 1, \ldots$, è una variabile aleatoria che vale 1 se $X_{\tau(j)_n+1} = j + 1$ e 0 altrimenti. Ciò mostra che la successione doppia $\{Y_n^{(j)}\}, j, n = 0, 1, \ldots$, è parzialmente scambiabile secondo de Finetti.

Osservazione 2.3. Sia Π un elemento aleatorio di $\mathcal{P}$ che abbia legge μ e, per ogni $i, j \in S$, indichiamo con $\Pi(i, j)$ l'elemento di posto (i, j) della matrice Π. Il Teorema 2.16 in Muliere, Secchi e Walker (1998) implica che:

(1) $\Pi(i, i + 1) = 1 - \Pi(i, 0)$ con probabilità uno, per ogni $i \in S$;

(2) $\{\Pi(i, i + 1)\}$ è una successione di variabili aleatorie indipendenti;

(3) per ogni $i \in S$, $\Pi(i, i + 1)$ ha distribuzione Beta(p_i, q_i).

Nel seguito di questo lavoro ci occuperemo della successione $\{T_n\}$: dimostreremo che essa è scambiabile quando il processo $\{X_n\}$ è ricorrente e verificheremo che la sua misura di de Finetti è un processo beta-Stacy.

Teorema 2.3. *Se $\{X_n\}$ è ricorrente, la successione $\{T_n\}$ è scambiabile.*

Dimostrazione. Se $\{X_n\}$ è ricorrente, esiste una matrice di transizione stocastica Π definita su $S \times S$ tale che, condizionatamente a $\Pi = \pi$, $\{X_n\}$ è una catena di Markov con matrice di transizione π. Pertanto, per ogni $n \geq 1$ e per ogni $k_1, \ldots, k_n \in S$ strettamente positivi

$$\begin{aligned} &P[T_1 = k_1, \ldots, T_n = k_n | \Pi = \pi] \\ &\quad = [\pi(0,1) \cdots \pi(k_1 - 1, k_1)\pi(k_1, 0)] \cdots [\pi(0,1) \cdots \pi(k_n - 1, k_n)\pi(k_n, 0)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Poichè, per ogni $1 \leq i \leq n$,

$$P[T_i = k_i | \Pi = \pi] = \pi(0,1) \cdots \pi(k_i - 1, k_i)\pi(k_i, 0) \tag{11}$$

allora

$$P[T_1 = k_1, \cdots, T_n = k_n | \Pi = \pi] = \prod_{i=1}^{n} P[T_i = k_i | \Pi = \pi] \tag{12}$$

che è evidentemente vera anche quando alcuni k_i sono nulli.

Quindi, condizionatamente alla matrice stocastica Π, le variabili della successione $\{T_n\}$ sono indipendenti ed identicamente distribuite. Ovvero la successione $\{T_n\}$ è scambiabile.

Osservazione 2.4. La scambiabilità della successione $\{T_n\}$ può essere dedotta in modo diverso. Infatti, seguendo Diaconis e Freedman (1980), definiamo 0-blocco per il processo $\{X_n\}$ una successione finita di stati che iniziano con 0 e non contengono altri 0 e chiamiamo $\{B_n\}$ la successione degli 0-blocchi consecutivi di $\{X_n\}$. Diaconis e Freedman dimostrano che $\{B_n\}$ è scambiabile quando $\{X_n\}$ è parzialmente scambiabile e ricorrente. Di conseguenza, se ϕ è una funzione misurabile definita sullo spazio degli 0-blocchi, anche la successione $\{\phi(B_n)\}$ è scambiabile. Nel nostro caso, $T_n = \phi(B_n)$ è l'ultimo stato dell' n-esimo 0-blocco; pertanto la successione $\{T_n\}$ è scambiabile se $\{X_n\}$ è ricorrente.

Quando vale la (4), indichiamo con F la misura di Finetti della successione $\{T_n\}$; ovvero, condizionatamente a F, le variabili aleatorie della successione $\{T_n\}$ sono i.i.d. con distribuzione F. Con il prossimo teorema vogliamo dimostrare che F è un processo beta-Stacy su S con parametri $\{(q_n, p_n)\}$ (Walker e Muliere, 1997); ciò significa che F è un processo neutrale a destra tale che $F(0) = 0$ con probabilità uno e, per ogni $n \geq 1$, $[F(n) - F(n-1)]$ ha la stessa distribuzione di

$$P_n = W_n \prod_{j=1}^{n-1} (1 - W_j) \tag{13}$$

dove $\{W_n\}$ è una successione di variabili aleatorie indipendenti tali che, per ogni $n \geq 1$, W_n ha distribuzione Beta(q_n, p_n). Si noti che nella (13) abbiamo assunto $\prod_{i=1}^{0} = 1$ mentre Beta$(a, 0)$ indica la distribuzione che concentra tutta la massa di probabilità in 1 qualunque sia $a > 0$.

Teorema 2.4. *F è un processo beta-Stacy su S.*

Dimostrazione. Fissiamo $n \geq 1$ e gli interi $0 < k_1 \leq \ldots \leq k_n$. Allora,

$$\begin{aligned}
&P[T_1 = k_1, \ldots, T_n = k_n] \\
&= P[X_0 = 0, X_1 = 1, \ldots, X_{k_1} = k_1, X_{k_1+1} = 0, \ldots \qquad (14)\\
&\ldots X_{\sum_{j=1}^{n-1} k_j + n-1} = 0, \ldots, X_{\sum_{j=1}^{n} k_j + n-1} = k_n, X_{\sum_{j=1}^{n} k_j + n} = 0] \\
&= \prod_{j=1}^{\infty} \frac{B(q_j + t_{j,0}, p_j + t_{j,j+1})}{B(q_j, p_j)} \qquad (15)\\
&= E[\prod_{j=1}^{\infty} W_j^{t_{j,0}} (1 - W_j)^{t_{j,j+1}}]
\end{aligned}$$

dove $\{W_n\}$ è una successione di variabili aleatorie indipendenti tali che, per ogni $n \geq 1$, W_n ha distribuzione Beta(q_n, p_n). D'altra parte

$$t_{j,0} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} I[k_i = j] & \text{if } j \in \{k_1, \ldots, k_n\} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \qquad (16)$$

Inoltre, dal momento che le quantità k_i sono ordinate, per ogni $j \geq 1$,

$$t_{j,j+1} = \sum_{i=0}^{n-1} (n - i) I[k_i \leq j \leq k_{i+1} - 1] \qquad (17)$$

avendo posto $k_0 = 0$ ed avendo assunto che la funzione indicatrice di un insieme vuoto sia 0. Pertanto

$$\begin{aligned}
&P[T_1 = k_1, \ldots, T_n = k_n] \\
&= E[(\prod_{j=1}^{n} W_{k_j})(\prod_{j=0}^{k_1-1} (1 - W_j)^n) \prod_{j=k_1}^{k_2-1} (1 - W_j)^{n-1} \cdots \prod_{j=k_{n-1}}^{k_n-1} (1 - W_j)] \\
&= E[W_{k_1} \prod_{j=0}^{k_1-1} (1 - W_j) \cdots W_{k_n} \prod_{j=0}^{k_n-1} (1 - W_j)] \qquad (18)\\
&= E[\prod_{j=1}^{n} P_{k_j}]
\end{aligned}$$

dove, per ogni $n \geq 1$, P_n è definito come nella (13). D'altra parte la scambiabilità della successione $\{T_n\}$ implica che, per ogni $n \geq 1$ e per tutte le successioni $(k_1, \ldots, k_n)$ di elementi strettamente positivi di S,

$$P[T_1 = k_1, \ldots, T_n = k_n] = E[\prod_{j=1}^{n} P_{k_j}]. \qquad (19)$$

Se uno o più elementi di $(k_1, \ldots, k_n)$ sono uguali a 0, allora si ha invece che

$$P[T_1 = k_1, \ldots, T_n = k_n] = 0. \tag{20}$$

Le equazioni (19) e (20) sono sufficienti per dimostrare che la misura di de Finetti della successione $\{T_n\}$ è un processo beta-Stacy su S con parametri $\{(q_n, p_n)\}$. Si noti che F è una funzione di ripartizione aleatoria dal momento che assumiamo che sia verificata la condizione di ricorrenza (4).

Osservazione 2.5. Una costruzione alternativa del processo beta-Stacy su uno spazio finito per mezzo di un diverso schema di campionamento da urne appare in Walker e Muliere (1997).

Osservazione 2.6. Osserviamo che, per ogni $k \in S$,

$$P[T_1 = k] = \frac{q_k}{p_k + q_k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p_j}{p_j + q_j} \tag{21}$$

dove, ancora una volta, $\prod_0^{-1} = 1$.

Inoltre, per ogni $n \geq 1$ e $k \in S$,

$$P[T_{n+1} = k | T_1, T_2, \cdots, T_n] = \frac{q_k + n_k}{p_k + q_k + n_k + m_k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{p_j + m_j}{p_j + q_j + n_j + m_j} \tag{22}$$

sull'insieme $\bigcap_{i=1}^{\infty} \{\tau_i < \infty\}$ se definiamo $n_j = \sum_{i=1}^{n} I(T_i = j)$ e $m_j = \sum_{i=1}^{n} I(T_i > j)$ per ogni $0 \leq j \leq k-1$. Pertanto, quando la (4) è verificata, la (22) è vera con probabilità uno.

Osservazione 2.7. Specificando opportunamente la successione dei parametri $\{(q_n, p_n)\}$, si possono ottenere differenti leggi per la funzione di ripartizione aleatoria F che sono comunemente utilizzate nella impostazione bayesiana non parametrica; ad esempio, il processo di Dirichlet o il processo gamma. Per ulteriori dettagli su questo argomento rimandiamo al lavoro di Walker and Muliere (1997).

3. Conclusioni e possibili sviluppi

L'idea che nella sezione precedente ci ha permesso di generare il processo beta-Stacy per mezzo di una passeggiata aleatoria rinforzata sugli interi è stata estesa a situazioni più generali in Muliere, Secchi e Walker (1998) ove si introduce la classe di processi *RUP*. Un *RUP* è definito su un spazio numerabile di urne di Pólya, ognuna delle quali contiene un numero finito di colori secondo una data composizione iniziale; le transizioni del processo tra gli stati dello spazio ove è definito sono regolate da una legge di moto assegnata. I *RUP* sembrano essere particolarmente adatti all'analisi non-parametrica di problemi di sopravvivenza. In particolare è possibile modellare per mezzo di *RUP* processi multi-stato che rappresentano la funzione di sopravvivenza di pazienti affetti da malattie il cui decorso è descritto da diversi livelli.

4. Ringraziamenti

Ringraziamo Fulvio Spezzaferri per le interessanti osservazioni fatte in occasione della discussione del lavoro.

Riferimenti bibliografici

BLACKWELL D., MACQUEEN J. B. (1973), "Ferguson distributions via Pólya-urn schemes", *The Annals of Statistics*, 1, pp. 353–355.

COPPERSMITH D., DIACONIS P. (1986), "Random walk with reinforcement", Unpublished.

DE FINETTI B. (1938), "Sur la condition d'"equivalence partiale". VI Colloque Geneve, *Act. Sci. ind.*, n. 739, Herman, Paris.

DIACONIS P., FREEDMAN D. (1980), "De Finetti's Theorem for Markov chains", *The Annals of Probability*, 8, pp. 115–130.

MAULDIN R. D., SUDDERTH W. D., WILLIAMS S. C. (1992), "Pólya trees and random distributions", *The Annals of Statistics*, 20, pp. 1203–1221.

MULIERE P., SECCHI P., WALKER S. G. (1998), "Urn schemes and reinforced random walks for Bayesian nonparametrics", *Quaderni di Dipartimento*, #71 (2–98), Dipartimento di Economia Politica e Metodi Quantitativi, Università di Pavia.

WALKER S. G., MULIERE P. (1997), "Beta-Stacy processes and a generalization of the Pólya-urn scheme", *The Annals of Statistics*, 4, pp. 1762-1780.

Summary

UNO SCHEMA D'URNA PER IL PROCESSO BETA-STACY

An Urn Scheme for Beta-Stacy Process

We define a reinforced random walk on a discrete space of Pólya urns which generates an exchangeable sequence of random variables whose de Finetti measure is that for a beta-Stacy process.

Keywords

Urn schemes, partial exchangeability, mixture of Markov chains, Bayesian nonparametrics.