UNA NOTA SUL PROBLEMA DELLA STABILITÀ DELLE DECISIONI BAYESIANE

A Note on the Problem of Stability for Bayesian Decisions

MICOL AMAR
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Pavia

PIETRO MULIERE
Dipartimento di Economia Politica e Metodi Quantitativi
Università degli Studi di Pavia

PIERCESARE SECCHI
Dipartimento di Economia Politica e Metodi Quantitativi
Università degli Studi di Pavia

1. Introduzione

Supponiamo di dover scegliere un'azione $a \in \mathcal{A}$ sapendo di incorrere in una perdita $L(a, x)$ che dipende, oltre che da a, anche dalla realizzazione x di una quantità aleatoria $X \in \mathcal{X}$. Assumiamo che X abbia distribuzione di probabilità P. Ricercheremo, se esiste, quell'azione ottima a_0 che rende minima la perdita attesa definita, per ogni $a \in \mathcal{A}$, come

$$\mathcal{F}(a) = \int_{\mathcal{X}} L(a, x)P(dx).$$

In questo lavoro prenderemo in esame il problema relativo alla stabilità dell'azione a_0 rispetto a piccole variazioni della funzione di perdita L e della probabilità P.

Il problema non è nuovo; in ambito bayesiano è stato considerato da molti autori tra cui Kadane e Chuang [1978] che lo introducono nel modo seguente. Data una successione $\{L_n\}$ di funzioni di perdita e una successione $\{P_n\}$ di misure di probabilità, consideriamo la successione $\{\mathcal{F}_n\}$ delle perdite attese definite, per ogni n e per ogni $a \in \mathcal{A}$, da

$$\mathcal{F}_n(a) = \int_{\mathcal{X}} L_n(a, x)P_n(dx).$$

La decisione a_0 è detta *stabile* se, per tutte le successioni $\{L_n\}$ e $\{P_n\}$ convergenti in modo opportuno, rispettivamente, a L e a P, accade che la differenza

$$\inf_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{F}_n(a) - \mathcal{F}_n(a_0) \tag{1}$$

converge a 0 al crescere di n. A parole: a_0 è stabile se è piccola la differenza tra la perdita attesa relativa ad a_0 valutata in una situazione in cui L e P hanno subito una piccola variazione e la più piccola perdita attesa che si avrebbe nella medesima situazione.

Lo stesso problema è stato preso in considerazione anche da Salinetti[1991, 1994] la quale lo ha affrontato studiando la Γ-convergenza (o epi-convergenza) delle funzioni integrali $\mathcal{F}_n$ alla funzione $\mathcal{F}$.

I lavori di questi autori hanno in comune il fatto di studiare il problema della stabilità di una decisione Bayesiana sotto condizioni analitiche forti rispetto sia alla regolarità della funzione di perdita L che alla convergenza della successione $\{L_n\}$ a L e ciò al fine di richiedere condizioni di convergenza debole per le probabilità P_n alla probabilità P. E' questo un aspetto importante del problema; da un punto di vista analitico, risulta infatti evidente che il tipo di convergenza richiesto per la successione $\{L_n\}$ non può essere indipendente da quello richiesto per la successione $\{P_n\}$, anche se le quantità in questione svolgono un ruolo completamente diverso e dovrebbe essere la natura del problema a suggerire che cosa si debba intendere per 'piccole variazioni' della funzione di perdita L o della probabilità P.

Obiettivo primario di questo lavoro è quello di studiare la stabilità di una decisione Bayesiana quando la funzione di perdita L non soddisfi forti condizioni di regolarità. Ciò ha, per esempio, interesse nell'analisi di molti problemi di regolazione e controllo dove sono di uso comune funzioni di perdita discontinue nella variabile x.

Come Salinetti, studieremo la Γ-convergenza delle funzioni $\mathcal{F}_n$ quando le successioni $\{L_n\}$ e $\{P_n\}$ convergano in modo adeguato. Ci limiteremo però a considerare situazioni in cui le probabilità P_n sono tutte dominate da una misura μ, che per semplicità assumeremo essere quella di Lebesgue. Pertanto, forniremo condizioni relative alla convergenza delle funzioni L_n e a quella delle densità k_n delle probabilità P_n le quali garantiscano la convergenza a 0 delle differenze (1); ciò equivale ad assicurare la stabilità di a_0 rispetto a 'piccole variazioni' di L e di P nel senso definito dalle convergenze in questione. Osserviamo fin da subito che, non volendo imporre condizioni di regolarità alla funzione L, saremo costretti a richiedere condizioni di convergenza per la successione di densità $\{k_n\}$ che, in generale, implicano convergenze poco più forti di quella debole per la successione $\{P_n\}$.

La Γ-convergenza è un tipo di convergenza variazionale, introdotta da De Giorgi [1975, 1979] e studiata diffusamente anche da Attouch [Attouch, 1984], che si rivela particolarmente utile per lo studio della convergenza dei minimi di successioni di funzionali integrali. Definiremo la nozione di Γ-convergenza nella seconda sezione di questo lavoro, insieme ad alcuni fondamentali risultati ad essa relativi. La terza sezione è dedicata alla dimostrazione di alcune condizioni sufficienti per la Γ-convergenza e per la convergenza puntuale di successioni $\{\mathcal{F}_n\}$ di funzionali integrali che abbiano, per ogni n e per ogni $a \in \mathcal{A}$, rappresentazione del tipo

$$\mathcal{F}_n(a) = \int_{\mathcal{X}} L_n(a,x)k_n(x)\,dx. \tag{2}$$

Nella quarta sezione mostreremo come applicare questi risultati ad alcuni problemi di stabilità della decisione Bayesiana, quando le L_n siano intese come funzioni di perdita e le k_n siano densità di probabilità. Alcuni esempi ed applicazioni specifiche verranno considerati nella quinta ed ultima sezione del lavoro.

2. Preliminari

Sia $\mathcal{Y}$ uno spazio dotato di una metrica τ. Diremo che una successione di funzioni $\{\mathcal{F}_n\}$ definite su $\mathcal{Y}$ e a valori in $\Re$ è Γ-*convergente* ad una funzione $\mathcal{F}:\mathcal{Y}\to\Re$, e scriveremo $\mathcal{F}_n \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{F}$, se, per ogni $y \in \mathcal{Y}$, sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

$$\mathcal{F}(y) \le \inf\left\{\liminf_{n\to\infty}\mathcal{F}_n(y_n) : \{y_n\}\subseteq\mathcal{Y},\ \tau(y_n,y)\to 0\right\} = \Gamma\text{-}\liminf_{n\to+\infty}\mathcal{F}_n(y),$$

$$\mathcal{F}(y) \ge \inf\left\{\limsup_{n\to\infty}\mathcal{F}_n(y_n) : \{y_n\}\subseteq\mathcal{Y},\ \tau(y_n,y)\to 0\right\} = \Gamma\text{-}\limsup_{n\to+\infty}\mathcal{F}_n(y).$$

Enunciamo di seguito alcuni risultati relativi alla Γ-convergenza per la dimostrazione dei quali rimandiamo a Dal Maso[1993].

Osserviamo innanzitutto che, quando esiste, il Γ-limite è unico ed è inferiormente semicontinuo rispetto alla metrica τ.

Il prossimo teorema giustifica l'introduzione della Γ-convergenza come opportuna convergenza variazionale utile per lo studio della convergenza dei minimi di successioni di funzionali. Per enunciarlo abbiamo bisogno della nozione di coercività.

Una funzione $\phi:\mathcal{Y}\to\Re$ si dice *coerciva* se, per ogni $t\in\Re$, l'insieme $\{y\in\mathcal{Y} : \phi(y)\le t\}$ è precompatto in $\mathcal{Y}$. Una semplice generalizzazione del teorema di Weierstrass permette di dimostrare che ogni funzione semicontinua inferiormente e coerciva ammette punto di minimo. Una successione di funzioni $\{\mathcal{F}_n\}$, definite su $\mathcal{Y}$ e a valori in $\Re$, si dice *equicoerciva* se esiste una funzione $\phi:\mathcal{Y}\to\Re$ semicontinua inferiormente e coerciva tale che $\mathcal{F}_n\ge\phi$ per ogni intero n.

Teorema 2.1 *Assumiamo che la successione $\{\mathcal{F}_n\}$ sia equicoerciva e Γ-convergente ad una funzione $\mathcal{F}$. Allora $\mathcal{F}$ è coerciva e* $\min_{y\in\mathcal{Y}}\mathcal{F}(y) = \lim_{n\to\infty}\inf_{y\in\mathcal{Y}}\mathcal{F}_n(y)$.

In generale la Γ-convergenza è indipendente dalla convergenza puntuale. Il teorema che segue stabilisce alcune condizioni sotto le quali le due nozioni di convergenza diventano equivalenti.

Una successione di funzioni $\mathcal{F}_n:\mathcal{Y}\to\Re$ si dice *localmente equilimitata* se, per ogni $y\in\mathcal{Y}$, esiste un intorno U di y e $M\ge 0$ tale che $|\mathcal{F}_n(y')|\le M$ per ogni $y'\in U$ e per ogni intero n.

Teorema 2.2 *Se $\mathcal{Y}$ è uno spazio vettoriale normato ed $\{\mathcal{F}_n\}$ è una successione localmente equilimitata di funzioni convesse, allora $\mathcal{F}_n\xrightarrow{\Gamma}\mathcal{F}$ se e solo se $\{\mathcal{F}_n\}$ converge puntualmente a $\mathcal{F}$.*

A conclusione di questi preliminari ricordiamo alcune nozioni di convergenza utili nel seguito. Siano $p,q\in[1,+\infty]$ due numeri reali tali che $p^{-1}+q^{-1}=1$. Se (Z,σ,μ) è uno spazio di misura, denotiamo con $s\text{-}L^p_\mu(Z)$ la usuale convergenza L^p in Z rispetto alla misura μ. Se $1\le p<\infty$, diciamo che una successione $\{z_n\}$ di elementi di $L^p_\mu(Z)$ converge debolmente a $z\in L^p_\mu(Z)$ ($z_n\rightharpoonup z$ $w\text{-}L^p_\mu(Z)$) se

$$\lim_{n\to\infty}\int_Z v(z_n-z)\,d\mu = 0 \tag{3}$$

dove k è una densità su $\mathcal{X}$ ed L è una funzione di perdita misurabile, convessa rispetto alla variabile a. Assumiamo che esista un punto $a_0 \in \Re$ tale che $\mathcal{F}(a_0) = \min_{a\in\Re} \mathcal{F}(a)$.

Per ogni intero n, sia $L_n : \Re \times \mathcal{X} \to [0, +\infty)$ una funzione di perdita misurabile convessa rispetto alla prima variabile e sia P_n una misura di probabilità definita sullo spazio $\mathcal{X}$ munito dell'opportuna σ-algebra di Borel. Ci limiteremo a considerare il caso in cui le probabilità P_n siano dotate di densità k_n rispetto alla misura di Lebesgue. Tuttavia i risultati che otterremo in questa sezione possono essere facilmente estesi al caso in cui $\mathcal{X}$ sia un generico spazio misurabile munito di una misura σ-finita μ che domini le probabilità P_n. Per ogni intero n e per ogni $a \in \Re$, definiamo

$$\mathcal{F}_n(a) = \int_{\mathcal{X}} L_n(a,x)k_n(x)\ dx \quad \text{e} \quad \rho_n(a) = \mathcal{F}_n(a) - \mathcal{F}_n(a_0). \tag{9}$$

Studiare la stabilità di a_0 equivale ad indagare per quali successioni $\{L_n\}$ convergenti ad L e per quali successioni $\{k_n\}$ convergenti a k la quantità $\inf_{a\in\Re} \rho_n(a)$ converge a 0. Assumiamo che esista una funzione $\phi : \Re \to [0, +\infty)$ coerciva e semicontinua inferiormente ed una funzione $\psi : \Re \to [0, +\infty)$ localmente limitata, tali che si abbia

(ii)′ $\phi(a) \leq L(a,x) \leq \psi(a)$ per ogni $(a,x) \in \Re \times \mathcal{X}$.

Il teorema che segue stabilisce che la decisione a_0 è stabile rispetto a tutte le successioni $\{L_n\}$ di funzioni di perdita che convergono uniformemente a L e a tutte le successioni $\{k_n\}$ di densità che convergono w-$L^1(\mathcal{X})$ a k; ciò equivale a richiedere che, per ogni insieme di Borel B di $\mathcal{X}$, si abbia $\lim_{n\to\infty} \int_B k_n(x)\ dx = \int_B k(x)\ dx$.

Teorema 4.1 *Se la successione $\{k_n\}$ converge w-$L^1(\mathcal{X})$ alla funzione k e la successione $\{L_n\}$ converge uniformemente a L in $\Re \times \mathcal{X}$, allora $\inf_{a\in\Re} \rho_n(a) \to 0$.*

Dimostrazione Osserviamo che, per n sufficientemente grande, tutte le funzioni L_n soddisfano una condizione analoga alla (ii)′.

Applicando il Teorema 3.1 e tenendo conto dell'Osservazione 3.1, otteniamo che $\mathcal{F}_n \to \mathcal{F}$ puntualmente, $\mathcal{F}_n \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{F}$ ed $\inf_{a\in\Re} \mathcal{F}_n(a) \to \min_{a\in\Re} \mathcal{F}(a)$. Pertanto si ha che

$$\inf_{a\in\Re} \rho_n(a) = \inf_{a\in\Re} \mathcal{F}_n(a) - \mathcal{F}_n(a_0) \to \min_{a\in\Re} \mathcal{F}(a) - \mathcal{F}(a_0) = 0.$$

Osservazione 4.1 Un risultato analogo è stato dimostrato da Kadane e Chuang [1978, Teorema 2] in un contesto topologico differente.

L'ipotesi di convergenza uniforme può essere indebolita richiedendo che, per ogni $a \in \Re$, $L_n(a,\cdot)$ converga s-$L^\infty(\mathcal{X})$ a $L(a,\cdot)$ a patto che, per ogni n, le funzioni L_n soddisfino la (ii)′.

5. Esempi

Per illustrare i precedenti risultati consideriamo alcuni semplici esempi.

Esempio 5.1 Sia $\mathcal{X} = \Re$. Assumiamo che, nella rappresentazione della funzione $\mathcal{F}$ definita dalla (8), L sia una funzione di perdita che abbia la seguente espressione

$$L(a,x) = I[x \leq x_0]b_1(a - xg(x))^2 + I[x > x_0]b_2(a - xg(x))^2. \tag{10}$$

dove $x_0 \in \Re$, b_1 e b_2 sono due numeri reali positivi e $g : \Re \to [0, +\infty)$ è una funzione tale che: $\lim_{x\to x_0} g(x) = 1$ e $|x|g(x) \leq C$ per ogni $x \in \Re$. Osserviamo che la funzione di perdita L soddisfa la condizione (ii)′ con

$$\phi(a) = \min(b_1, b_2)\max([a^2 - 2|a|C], 0) \quad \text{e} \quad \psi(a) = (b_1 + b_2)(a^2 + C^2 + 2|a|C)$$

inoltre, in un intorno di x_0, essa approssima la funzione di perdita

$$L'(a,x) = I[x \leq x_0]b_1(a - x)^2 + I[x > x_0]b_2(a - x)^2$$

che è quadratica in a e discontinua in x_0. Quest'ultima è la usuale funzione di perdita quadratica quando $b_1 = b_2$.

Il Teorema 4.1 afferma che la decisione a_0 che minimizza la funzione $\mathcal{F}$ è stabile rispetto a successioni $\{P_n\}$ di probabilità assolutamente continue le cui densità convergano w-$L^1(\Re)$ alla densità k e alla convergenza uniforme a L di successioni di funzioni di perdita convesse rispetto ad a. Un risultato analogo si ottiene considerando funzioni di perdita del tipo $L(a,x) = I[a \leq xg(x)]b_1|a - xg(x)| + I[a > xg(x)]b_2|a - xg(x)|$.

Consideriamo ora un problema di stabilità di una previsione rispetto a piccole variazioni del modello statistico.

Esempio 5.2 Sia $X \in \Re$ una variabile aleatoria e supponiamo che la funzione di ripartizione di X abbia densità k definita, per ogni $x \in \Re$, dalla

$$k(x) = \int_{\Theta\times Q} f(x|\theta,q)g(q|\theta)\pi(\theta)\ dq\ d\theta$$

dove Θ e Q sono due sottospazi compatti di $\Re$ e, per ogni $\theta \in \Theta$ e $q \in Q$, $f(\cdot|\theta,q)$ è una densità su $\Re$ mentre $g(\cdot|\theta)$ è una densità su Q. Infine assumiamo che π sia una densità su Θ. Per esempio, $f(\cdot|\theta,q)$ potrebbe rappresentare un modello statistico che dipende dal 'parametro' (θ,q) la cui distribuzione è specificata dalla densità $g(q|\theta)\pi(\theta)$. Oppure θ potrebbe rappresentare la realizzazione di una quantità aleatoria di interesse statistico la cui distribuzione di probabilità abbia densità π; dato θ, i modelli statistici della famiglia $\{f(\cdot|\theta,q)\}_{q\in Q}$ vengono utilizzati per descrivere la distribuzione di X, e ad ognuno di essi viene assegnato un peso aleatorio che ha densità $g(q|\theta)$.

Fissata una funzione di perdita L, convessa nella prima variabile e che soddisfi (ii)′, assumiamo che esista una decisione a_0 che rende minima la funzione $\mathcal{F}$ definita dalla (8). Siamo interessati a studiare la stabilità di a_0 rispetto a piccole variazioni nella specificazione delle densità g e π.

Consideriamo successioni $\{\pi_n\}$ e $\{g_n\}$ equilimitate tali che, per ogni n, π_n sia un densità su Θ e, per ogni $\theta \in \Theta$, $g_n(\cdot|\theta)$ sia una densità su Q. Assumiamo che $\pi_n \rightharpoonup \pi$ w^*-$L^\infty(\Theta)$. Poichè Θ ha misura di Lebesgue finita, ciò equivale a chiedere che $\int_B \pi_n(\theta)\ d\theta \to \int_B \pi(\theta)\ d\theta$, per ogni insieme B di Borel di Θ. Analogamente, per ogni $\theta \in \Theta$, assumiamo che $g_n(\cdot|\theta) \rightharpoonup g(\cdot|\theta)$ w^*-$L^\infty(Q)$.

per ogni $v \in L^q_\mu(Z)$. Nel caso in cui $p = \infty$ useremo una terminologia differente; diremo infatti che $\{z_n\}$ converge w^*-$L^\infty_\mu(Z)$ quando (3) vale per tutti i $v \in L^1_\mu(Z)$. Osserviamo che le nozioni di convergenza debole or ora introdotte sono quelle usuali negli spazi di Banach $L^p_\mu(Z)$ e che, nella loro definizione, non è necessario assumere che la funzione limite appartenga all'appropriato spazio $L^p_\mu(Z)$ poichè, per ogni $p \geq 1$, questo è chiuso rispetto a tutte le nozioni di convergenza debole più sopra considerate [Brezis, 1983].

Nel seguito ometteremo di indicare la misura μ quando questa sia la misura di Lebesgue definita su (Z, σ). Useremo la lettera C per indicare una costante positiva indipendente dai parametri del problema il cui valore potrà variare di volta in volta.

3. Il teorema principale

Sia $\mathcal{X}$ un sottoinsieme aperto di $\Re$ e consideriamo una successione di funzioni $\{\mathcal{F}_n\}$ definite in $\Re$ dalla relazione

$$\mathcal{F}_n(a) = \int_{\mathcal{X}} L_n(a,x)k_n(x)\,dx$$

ove, per ogni intero n e per ogni $a \in \Re$, $L_n(a,\cdot)$ e k_n sono funzioni misurabili, non negative che appartengono rispettivamente a $L^p(\mathcal{X})$ e $L^q(\mathcal{X})$.

Supponiamo che esistano due costanti $m, M \in (0,\infty)$, due funzioni non negative ℓ_1, ℓ_2 di $L^p(X)$, una funzione $\psi : \Re \to [0,+\infty)$ localmente limitata e una funzione $\phi : \Re \to [0,+\infty)$ semicontinua inferiormente e coerciva tali che, per ogni n, siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

(i) $L_n(\cdot,x)$ è convessa, per ogni $x \in \mathcal{X}$;

(ii) $\ell_1(x)\phi(a) \leq L_n(a,x) \leq \psi(a)\ell_2(x)$ per ogni $(a,x) \in \Re \times \mathcal{X}$;

(iii) $\int_{\mathcal{X}} \ell_2(x)k_n(x)\,dx \leq M < +\infty$;

(iv) $\int_{\mathcal{X}} \ell_1(x)k_n(x)\,dx \geq m > 0$.

Osserviamo che le condizioni (ii)-(iv) sono sostanzialmente condizioni di crescita sulle funzioni L_n e k_n le quali implicano che le funzioni $\mathcal{F}_n$ siano ben definite e con crescite controllate inferiormente e superiormente. Notiamo inoltre che (i) e (ii) implicano la continuità di $L_n(\cdot,x)$, per quasi ogni $x \in \mathcal{X}$ fissato e per ogni intero n, mentre non viene avanzata alcuna ipotesi di regolarità rispetto alla variabile x.

Il seguente teorema garantisce la convergenza puntuale e la Γ-convergenza della successione $\{\mathcal{F}_n\}$, nonché la convergenza della successione $\{\inf_{a\in\Re}\mathcal{F}_n(a)\}$.

Teorema 3.1 *Assumiamo che $1 < p < +\infty$ e che esistano due funzioni misurabili $L : \Re \times \mathcal{X} \to [0,+\infty)$ e $k : \mathcal{X} \to [0,+\infty)$ per le quali valga una delle seguenti ipotesi:*

$$\begin{cases} L_n(a,\cdot) \to L(a,\cdot) & s\text{-}L^p(\mathcal{X}), \text{ per ogni } a \in \Re \\ k_n \rightharpoonup k & w\text{-}L^q(\mathcal{X}) \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} L_n(a,\cdot) \rightharpoonup L(a,\cdot) & w\text{-}L^p(\mathcal{X}), \text{ per ogni } a \in \Re \\ k_n \to k & s\text{-}L^q(\mathcal{X}). \end{cases} \tag{5}$$

Per ogni $a \in \Re$, sia $\mathcal{F}(a) = \int_{\mathcal{X}} L(a,x)k(x)\,dx$. Allora:

$$\mathcal{F}_n \to \mathcal{F} \quad \textit{puntualmente}, \qquad \mathcal{F}_n \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{F}, \tag{6}$$

$$\inf_{a\in\Re}\mathcal{F}_n(a) \to \min_{a\in\Re}\mathcal{F}(a). \tag{7}$$

Dimostrazione. $\mathcal{F}_n \to \mathcal{F}$ puntualmente poichè dall'ipotesi (4) si ha che

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_n(a) - \mathcal{F}(a)| &= \left|\int_{\mathcal{X}} L_n(a,x)k_n(x)\,dx - \int_{\mathcal{X}} L(a,x)k(x)\,dx\right| \\ &\leq \int_{\mathcal{X}} |L_n(a,x) - L(a,x)|k_n(x)\,dx + \left|\int_{\mathcal{X}} L(a,x)(k_n(x) - k(x))\,dx\right| \\ &\leq ||L_n(a,\cdot) - L(a,\cdot)||_{L^p}||k_n||_{L^q} + \left|\int_{\mathcal{X}} L(a,x)(k_n(x) - k(x))\,dx\right| \\ &\leq C||L_n(a,\cdot) - L(a,\cdot)||_{L^p} + \left|\int_{\mathcal{X}} L(a,x)(k_n(x) - k(x))\,dx\right| \to 0. \end{aligned}$$

La terza disuguaglianza segue dal fatto che la successione $\{k_n\}$, essendo debolmente convergente, è limitata in $L^q(\mathcal{X})$, come discende dal Teorema di Banach-Steinhaus [Brezis, 1983]. Nel caso in cui sia soddisfatta l'ipotesi (5), si procede in modo analogo scambiando i ruoli di L_n e k_n. Dimostriamo ora che la successione $\{\mathcal{F}_n\}$ è localmente equilimitata. Infatti, da (ii) e (iii) segue che, per ogni $a \in \Re$,

$$0 \leq \mathcal{F}_n(a) \leq \psi(a)\int_{\mathcal{X}} \ell_2(x)k_n(x)\,dx \leq M\psi(a).$$

Poichè ψ è localmente limitata, ciò implica che $\{\mathcal{F}_n\}$ sia localmente equilimitata.

La convergenza puntuale della successione $\{\mathcal{F}_n\}$ insieme alla sua locale equilimitatezza e al fatto che le funzioni $\mathcal{F}_n$ sono convesse implicano, grazie al Teorema 2.2, che $\mathcal{F}_n \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{F}$. Infine, la (7) segue dal Teorema 2.1, una volta verificato che la successione $\{\mathcal{F}_n\}$ è equicoerciva; ma ciò segue da (ii) e (iv) dopo aver osservato che

$$\mathcal{F}_n(a) \geq \phi(a)\int_{\mathcal{X}} \ell_1(x)k_n(x)\,dx \geq m\phi(a).$$

Osservazione 3.1 Quando è verificata l'ipotesi (4) e $q = +\infty$, il teorema resta valido, pur di considerare la convergenza w^*-$L^\infty(\mathcal{X})$ della successione $\{k_n\}$. Analoga osservazione va fatta quando è verificata l'ipotesi (5), scambiando i ruoli delle successioni $\{L_n(a,\cdot)\}$ e $\{k_n\}$.

Osservazione 3.2 Il teorema può esser esteso al caso in cui $\mathcal{X}$ sia un qualunque spazio di misura e le funzioni $\mathcal{F}_n$ e $\mathcal{F}$ siano definite su un generico spazio vettoriale normato.

4. Applicazione al problema della stabilità di una decisione Bayesiana

Sia $\mathcal{F}$ la funzione definita, per ogni $a \in \Re$, dalla relazione

$$\mathcal{F}(a) = \int_{\mathcal{X}} L(a,x)k(x)\,dx, \tag{8}$$

Se le densità k_n che appaiono nella rappresentazione (9) sono definite dalla

$$k_n(x) = \int_{\Theta \times Q} f(x|\theta, q) g_n(q|\theta) \pi_n(\theta)\, dq\, d\theta, \qquad \text{per ogni } x \in \Re,$$

e le funzioni di perdita L_n sono convesse rispetto alla prima variabile e convergono uniformemente a L, allora $\inf_{a \in \Re} \rho_n(a) \to 0$. Infatti non è difficile dimostrare, con alcuni semplici calcoli e applicando il Teorema di Convergenza Dominata, che la successione $\{k_n\}$ converge s-$L^1(\mathcal{X})$ alla funzione di densità k. La tesi segue a questo punto da una semplice applicazione del Teorema 3.1, sotto l'ipotesi (5), e dalla Osservazione 3.1.

Riferimenti Bibliografici

ATTOUCH H. (1984). *Variational Convergence for Functions and Operators.* Pitman Applicable Mathematics Series.

BREZIS H. (1983). *Analyse Fonctionelle. Théorie et Applications.* Masson, Paris.

DAL MASO G. (1993). *An introduction to Γ-convergence.* Birkhäuser.

KADANE J.B. e D.T.CHUANG (1978). Stable decision problems. *Ann. Stat.*, 6, 1095–1110.

DE GIORGI E. e T. FRANZONE (1975). Su un tipo di convergenza variazionale. *Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 58, 842–850.

DE GIORGI E. e T. FRANZONE (1979). Su un tipo di convergenza variazionale. *Rend. Sem. Mat. Brescia*, 3, 63–101.

SALINETTI G. (1991). Metodologie per la robustezza. *Atti del Convegno 'Sviluppi metodologici nei diversi approcci all'inferenza statistica'.* Pitagora Editrice, Bologna.

SALINETTI G. (1994). Stability of Bayesian decisions. *Journal of Statistical Planning and Interference*, 40, 313–329.

Summary

UNA NOTA SUL PROBLEMA DELLA STABILITÀ DELLE DECISIONI BAYESIANE

A Note on the Problem of Stability for Bayesian Decisions

We use the notion of Γ-convergence for proving a result on the stability of optimal Bayesian decisions when the loss function and the statistical model are subject to small perturbations.

Keywords: Γ-convergence, stability, optimal Bayesian decision.