A-26

SOCIETA' ITALIANA DI STATISTICA

ATTI DELLA XXXVII RIUNIONE SCIENTIFICA

SAN REMO 6-8 APRILE 1994

ESTRATTO

CISU

Una generalizzazione del bootstrap bayesiano
A generalization of the bayesian bootstrap

Pietro Muliere, Piercesare Secchi
Dipartimento di Economia Politica e Metodi Quantitativi
Università di Pavia

1. Introduzione

Il bootstrap venne proposto da Efron (1979) come tecnica di ricampionamento nell'ambito dell'analisi statistica non-parametrica; la sua estensione bayesiana è stata introdotta da Rubin (1981). Il primo obiettivo di questo lavoro è quello di mostrare come alcune semplici considerazioni di carattere previsivo leghino entrambi questi metodi al processo di Dirichlet-Ferguson (DF) (Ferguson, 1973).

Nella sua formulazione originaria il bootstrap bayesiano non tiene conto delle opinioni iniziali del ricercatore che compie l'analisi. Ciò discende dal fatto che il processo DF connesso a questa tecnica di ricampionamento ha a priori come parametro una misura che assegna peso trascurabile all'opinione iniziale. Il secondo obiettivo di questo lavoro è quello di proporre una estensione del bootstrap bayesiano in modo da renderlo utilizzabile nelle situazioni ove il processo DF che genera le osservazioni ha a priori come parametro una misura finita non-nulla.

Nel prossimo paragrafo introdurremo le due tecniche di bootstrap e metteremo in luce il loro legame con il processo DF mediante considerazioni di carattere previsivo. Nel terzo paragrafo proporremo una estensione del bootstrap bayesiano. Un semplice esempio concluderà il lavoro.

2. Bootstrap e Processo di Dirichlet-Ferguson

Il legame tra i metodi di bootstrap e il processo DF è stato messo in evidenza da Lo (1987) con argomenti di tipo asintotico. In questo paragrafo lo stesso legame verrà esaminato dal punto di vista *completamente previsivo.* Analoga impostazione per l'analisi del bootstrap in ambito parametrico è stata seguita da Muliere e Secchi (1992).

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio con probabilità e sia $\{X_n\}$ una successione di variabili aleatorie (v.a.) su di esso definite e a valori in $\Re$; $T_n(X_1, \ldots, X_n)$ sia una funzione reale e misurabile del vettore di v.a. $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Un problema classico in Statistica è quello di valutare la distribuzione di T_n quando non sia possibile determinarla analiticamente. Questo problema verrà affrontato nelle pagine seguenti sotto l'ipotesi che la successione $\{X_n\}$ sia scambiabile.

Quando le variabili aleatorie della successione $\{X_n\}$ sono indipendenti ed identicamente distribuite (i.i.d.) con funzione di ripartizione (f.d.r.) F nota, il metodo Monte Carlo fornisce una prima generale risposta al problema precedente. Infatti, se $T_1^*, \ldots, T_M^*$ sono M variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione $\mathcal{L}(T_n)$ uguale a quella di T_n, allora il Teorema di Glivenko-Cantelli afferma che la funzione di ripartizione empirica:

$$F_M^*(x) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} I(T_i^* \leq x), \quad x \in \Re, \tag{1}$$

al crescere di M converge con probabilità uno a $\mathcal{L}(T_n)$ secondo la norma del Sup. Per ottenere una realizzazione della (1), e quindi una approssimazione di $\mathcal{L}(T_n)$, basterà generare M campioni casuali di ampiezza n dalla F e valutare T_n in corrispondenza di ognuno di essi, ottenendo così M valori $t_1^*, \ldots, t_M^*$; la funzione di ripartizione empirica di queste quantità è una realizzazione della (1).

Quando le variabili della successione $\{X_n\}$ sono i.i.d., la loro f.d.r. F non è nota, ma è a disposizione una realizzazione di $(X_1, \ldots, X_n)$, la proposta di Efron (1979) è quella di modificare il metodo più sopra descritto nel modo che segue. Innanzitutto si stima la F per mezzo di una funzione di ripartizione calcolata sulla base della realizzazione di $(X_1, \ldots, X_n)$. Nella generale situazione non-parametrica, F viene stimata mediante la funzione di ripartizione empirica F_n generata da $(X_1, \ldots, X_n)$. Quindi, si approssima $\mathcal{L}(T_n)$ con $\mathcal{L}(\,T_n(X_1^*, \ldots, X_n^*) \,|\, X_1, \ldots, X_n\,)$, ove $\{X_1^*, \ldots, X_n^*\}$ sono, condizionatamente a $(X_1, \ldots, X_n)$, indipendenti ed identicamente distribuite con funzione di ripartizione F_n. Un'approssimazione di $\mathcal{L}(\,T_n(X_1^*, \ldots, X_n^*) \,|\, X_1, \ldots, X_n\,)$ potrà poi essere ottenuta applicando il metodo Monte Carlo precedentemente descritto. La proposta di Efron prende il nome di *metodo di bootstrap.*

Per successioni di v.a. $\{X_n\}$ scambiabili, il Teorema di Rappresentazione di de Finetti afferma che esiste una funzione di ripartizione *aleatoria* F condizionatamente alla quale le v.a. della successione sono i.i.d. con f.d.r. F. In questa situazione la proposta del metodo di bootstrap è espressa dalla seguente relazione:

$$\mathcal{L}(T_n(X_1, \ldots, X_n)|F) \approx^B \mathcal{L}(\,T_n(X_1^*, \ldots, X_n^*) \,|\, X_1, \ldots, X_n\,). \tag{2}$$

Ovvero la distribuzione condizionale di $T_n(X_1, \ldots, X_n)$, data F, viene approssimata dalla distribuzione condizionale di $T_n(X_1^*, \ldots, X_n^*)$, dato $(X_1, \ldots, X_n)$.

Dal punto di vista completamente previsivo, il ricercatore che voglia risolvere un problema inferenziale relativo alla successione $\{X_n\}$ è in generale interessato a valutare:

$$P(X_{n+1} \in A|X_1, \ldots, X_n) \tag{3}$$

ove A è un insieme di Borel in $\Re$. Osserviamo che, grazie alla scambiabilità della successione $\{X_n\}$:

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} \in A|X_1, \ldots, X_n) = \\ &\quad = E[F(A)|X_1, \ldots, X_n] = E[\,E[\frac{1}{n}\sharp\{X_i \in A\}|F] \,|\, X_1, \ldots, X_n], \quad \text{q.c.-P.} \end{aligned} \tag{4}$$

Se, per ogni n, definiamo $T_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}\sharp\{X_i \in A\}$, dalla (2) si ha che,

$$\mathcal{L}(\frac{1}{n}\sharp\{X_i \in A\}|F) \approx^B \mathcal{L}(\frac{1}{n}\sharp\{X_i^* \in A\} \mid X_1, \ldots, X_n),$$

e di conseguenza,

$$E[\frac{1}{n}\sharp\{X_i \in A\}|F] \approx^B E[\frac{1}{n}\sharp\{X_i^* \in A\}| X_1, \ldots, X_n] = F_n(A). \tag{5}$$

Dalla (4) e dalla (5) otteniamo che:

$$P(X_{n+1} \in A|X_1, \ldots, X_n) \approx^B F_n(A). \tag{6}$$

Ciò significa che il ricercatore che decida di usare il metodo di bootstrap per approssimare la distribuzione condizionale $\mathcal{L}(\frac{1}{n}\sharp\{X_i \in A\}|F)$, valuta la probabilità condizionale che la futura osservazione X_{n+1} appartenga all'insieme A uguale alla frequenza secondo la quale le osservazioni passate sono cadute in A.

Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione del processo DF e mette in luce il legame in senso previsivo che esiste tra questo processo e il metodo di bootstrap.

Teorema 2.1.1 (Regazzini,1978; Lo,1991) *Sia F una funzione di ripartizione aleatoria condizionatamente alla quale le v.a. di una successione $\{X_n\}$ sono i.i.d. con distribuzione F.*

Supponiamo che, per ogni n e per ogni A di Borel in $\Re$:

$$P(X_{n+1} \in A|X_1, \ldots, X_n) = \frac{k}{k+n}F_0(A) + \frac{n}{k+n}F_n(A),$$

ove, k è un numero reale strettamente positivo, F_0 è una funzione di ripartizione definita su $\Re$, e F_n è la funzione di ripartizione empirica di $(X_1, \ldots, X_n)$. Allora, F è un processo di Dirichlet di parametro $k\,F_0$.

Appare allora evidente che un ricercatore che usi il bootstrap per calcolare la distribuzione predittiva che appare nella (3) è in accordo con colui che assume F selezionata da un processo DF il cui parametro $k \to 0$. Ciò corrisponde alla situazione in cui l'opinione iniziale relativa al fenomeno in esame è riassunta dalla funzione di ripartizione F_0, ma il peso che a tale opinione viene assegnato è trascurabile rispetto ad n.

2.2. *Il bootstrap bayesiano*

Se $\{X_n\}$ è una successione di v.a. che, condizionatamente ad f.d.r. aleatoria F, sono i.i.d. con funzione di ripartizione F, Rubin (1981) ha proposto un metodo, da lui chiamato *bootstrap bayesiano*, per approssimare la distribuzione a posteriori di un funzionale $T(F, \mathbf{X})$, che dipende sia da F che da $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.

Un modo alternativo per descrivere la proposta di Rubin è il seguente. Sia $\{V_n\}$ una successione di v.a. i.i.d. con distribuzione Esponenziale Negativa di parametro 1 che siano altresì indipendenti dalle variabili della successione $\{X_n\}$. Dato $(X_1, \ldots, X_n)$, consideriamo la funzione di ripartizione aleatoria:

$$F_n^R(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n V_i}\sum_{i=1}^n V_i I(X_i \leq x), \; x \in \Re. \tag{7}$$

L'approssimazione fornita dal bootstrap bayesiano è espressa dalla seguente relazione:

$$\mathcal{L}(T(F,\mathbf{X})|X_1,\ldots,X_n) \approx^{BB} \mathcal{L}(T(F_n^R,\mathbf{X})|X_1,\ldots,X_n). \tag{8}$$

Osserviamo che, da un punto di vista del calcolo della probabilità condizionale che appare nella (3), si ha che:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} \in A \,|\, X_1,\ldots,X_n) &= E(\,F(A)\,|X_1,\ldots,X_n) = \\ &\approx^{BB} E(\,F_n^R(A)\,|X_1,\ldots,X_n) = E[\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n V_i}\sum_{\{i:X_i\in A\}} V_i\right)|X_1,\ldots,X_n] = F_n(A). \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che la distribuzione condizionale:

$$\mathcal{L}(\frac{1}{\sum_{i=1}^n V_i}\sum_{\{i:X_i\in A\}} V_i|X_1,\ldots,X_n)$$

è una Beta$(nF_n(A), n(1-F_n(A)))$.

Pertanto dal punto di vista completamente previsivo non vi è alcuna differenza tra il bootstrap di Efron e il bootstrap bayesiano. Nel paragrafo precedente abbiamo reso evidente il legame che esiste tra il metodo di bootstrap di Efron e il processo DF; le stesse considerazioni valgono evidentemente anche per il bootstrap bayesiano. Tuttavia, come è già stato osservato da Lo (1987), il legame tra il bootstrap bayesiano e il processo DF è ben più stretto. Infatti una conseguenza diretta del seguente lemma è che, condizionatamente a $(X_1,\ldots,X_n)$, la funzione di ripartizione aleatoria F_n^R che regge la procedura di bootstrap bayesiano è essa stessa un processo DF di parametro $n\,F_n$.

Lemma 2.2.1 *Sia α una funzione di ripartizione discreta il cui supporto è l'insieme finito e non vuoto $\{z_1,\ldots,z_r\}$, $z_i \in \Re$. Sia p_i la probabilità che α attribuisce al punto z_i, $i = 1,\ldots,r$, e siano $(V_1,\ldots,V_r)$ r v.a. indipendenti e tali che:*

$$\mathcal{L}(V_i) = Gamma(k\,p_i, 1), \quad i = 1,\ldots,r$$

con k reale strettamente positivo.

Allora,

$$F(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^r V_i}\sum_{i=1}^r V_i I(z_i \leq x), \quad x \in \Re$$

è un processo DF di parametro $k\alpha$.

Dimostrazione. Sia $(B_1,\ldots,B_s)$ una partizione misurabile di $\Re$ e consideriamo il vettore aleatorio $(F(B_1),\ldots,F(B_s))$. Osserviamo che:

$$F(B_j) = \frac{1}{\sum_{i=1}^r V_i}\sum_{\{i:z_i\in B_j\}} V_i$$

Poichè,

$$\mathcal{L}(\sum_{\{i:z_i\in B_j\}} V_i) = \text{Gamma}(k\alpha(B_j), 1), \quad j = 1,\ldots,s,$$

allora (Ferguson, 1973, p.211),

$$\mathcal{L}(\,(F(B_1),\ldots,F(B_s))\,) = \text{Dirichlet}(k\alpha(B_1),\ldots,k\alpha(B_s)). \tag{9}$$

Ma la (9) è vera per ogni partizione finita $(B_1, \ldots, B_s)$ di $\Re$ e quindi, per definizione, F è un processo DF di parametro $k\alpha$. $\diamond$

Dal momento che, condizionatamente a $(X_1, \ldots, X_n)$, F_n^R è un processo DF di parametro $n\,F_n$, il bootstrap bayesiano non necessita di particolari giustificazioni ogni qual volta la funzione di ripartizione aleatoria F, condizionatamente alla quale le v.a. della successione $\{X_n\}$ sono i.i.d., è, a posteriori, un processo DF di parametro $n\,F_n$. Vale la pena di osservare nuovamente che ciò accade se, a priori, F è un processo DF che ha parametro kF_0 con $k \to 0$. Se la funzione di ripartizione aleatoria F è a priori un processo DF che ha come parametro una misura finita e non-nulla, il metodo di bootstrap bayesiano è stato giustificato da Lo (1987) da un punto di vista asintotico, ossia quando il numero n di osservazioni diventa grande; ma anche in questo caso, al crescere dell'ampiezza campionaria n, il peso assegnato all'opinione iniziale diventa trascurabile. Sembra pertanto opportuno estendere il metodo di bootstrap bayesiano alle situazioni in cui il numero di osservazioni n è piccolo e l'opinione iniziale del ricercatore che compie l'analisi è ritenuta rilevante.

3. Una generalizzazione del bootstrap bayesiano

In questo paragrafo introduciamo l'ulteriore ipotesi che la funzione di ripartizione aleatoria F, condizionatamente alla quale le v.a. della successione $\{X_n\}$ sono i.i.d., sia un processo DF di parametro kF_0, ove k è un numero reale strettamente positivo e F_0 è una funzione di ripartizione propria. Vogliamo proporre un metodo che permetta di approssimare la distribuzione condizionale

$$\mathcal{L}(T(F, \mathbf{X})|X_1, \ldots, X_n) \tag{10}$$

ove T è un funzionale che dipende da F e da $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. In particolare considereremo funzionali del tipo,

$$T(F, \mathbf{X}) = \int h\, dF. \tag{11}$$

La distribuzione di funzionali di questo tipo, quando F è un processo DF, è stata studiata da Hannum, Hollander e Langberg (1981) e da Cifarelli e Regazzini (1990). Tuttavia i risultati raggiunti da questi autori sono spesso di difficile applicazione.

Se F è un processo DF di parametro kF_0, è ben noto che, condizionatamente a $(X_1, \ldots, X_n)$, F è ancora un processo DF di parametro $(n+k)\alpha = kF_0 + nF_n$, ove F_n è la funzione di ripartizione empirica generata da $(X_1, \ldots, X_n)$ (Ferguson, 1973). Quando la funzione di ripartizione α è discreta e con supporto finito $\{z_1, \ldots, z_r\}$, il Lemma 2.2.1 afferma che,

$$\mathcal{L}(T(F, \mathbf{X})\,|X_1, \ldots, X_n) = \mathcal{L}(T(\frac{1}{\sum_{i=1}^r V_i} \sum_{i=1}^r V_i I(z_i \leq \cdot), \mathbf{X})\,|X_1, \ldots, X_n) \quad \text{q.c.-P} \tag{12}$$

ove le v.a. V_i sono, condizionatamente a $(X_1, \ldots, X_n)$, i.i.d. con distribuzione Gamma$(\,(n+k)\alpha(z_i), 1\,)$, $i = 1, \ldots, r$. Ciò permette di far uso del metodo Monte Carlo per fornire una approssimazione della distribuzione (12).

Nei casi di più comune interesse il parametro α non è però una f.d.r. con supporto finito; in questi casi viene spontanea l'idea di approssimare la funzione di ripartizione α con una funzione di ripartizione α^*, discreta e con supporto finito, tale che la distribuzione condizionale (10) sia ben approssimata dalla

$$\mathcal{L}(T(F^*, \mathbf{X})\,|X_1, \ldots, X_n)$$

dove, dato $(X_1, \ldots, X_n)$, F^* è un processo DF di parametro $(n+k)\alpha^*$. Si osservi che il procedimento di Rubin assume $(n+k)\alpha^* = nF_n$, ossia approssima la misura finita $(n+k)\alpha = kF_0 + nF_n$ con la misura finita che si ottiene facendo tendere a zero il peso attribuito all'opinione iniziale F_0 relativa al fenomeno in esame; ciò è senz'altro adeguato quando il numero di osservazioni n è grande rispetto a k.

Al fine di rendere più precisa la proposta avanzata nelle righe precedenti introduciamo nello spazio delle funzioni di ripartizione definite su $\Re$ una distanza d che induca la metrica della convergenza debole; per esempio la distanza di Lévy. Consideriamo inoltre la classe delle funzioni misurabili $h : \Re \rightarrow \Re$ che soddisfano la seguente condizione.

Condizione 3.0.1 *Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\eta = \eta(\epsilon)$ tale che, se $d(\beta, \beta^*) < \eta$ allora,*

$$d(\, \mathcal{L}(\int h\, dG^*)\, ,\, \mathcal{L}(\int h\, dG)\,) < \epsilon,$$

dove β e β^* sono due funzioni di ripartizione, mentre G e G^* sono due processi DF rispettivamente di parametri $k\beta$ e $k\beta^*$, con k reale strettamente positivo.

Quando il funzionale T(F,**X**) è del tipo (11) e la funzione h soddisfa la Condizione 3.0.1 un modo per ottenere la funzione di ripartizione α^* che approssima il parametro α della legge a posteriori di F è quello di ricampionare da α, come discende dalla proposizione che segue.

Indichiamo con $\{X_m^*\}$ una successione di v.a. i.i.d. con f.d.r. β e con F_m^* la funzione di ripartizione empirica generata da $(X_1^*, \ldots, X_m^*)$. Inoltre indichiamo con $\{z_1^*, \ldots, z_r^*\}$, $(r \leq m)$, il supporto della funzione di ripartizione F_m^* e con p_j^* la probabilità che F_m^* attribuisce al punto z_j^*, $j = 1, \ldots, r$.

Proposizione 3.0.2 *Sia $h : \Re \rightarrow \Re$ una funzione misurabile che soddisfa la Condizione 3.0.1. Se, $(V_1, \ldots, V_r)$ sono r v.a. che, condizionatamente a $(X_1^*, \ldots, X_m^*)$, sono indipendenti e tali che $\mathcal{L}(V_j) = Gamma(kp_j^*, 1)$, $j = 1, \ldots, r$, allora, con probabilità uno,*

$$\lim_{m \to \infty} d(\, \mathcal{L}(\frac{1}{\sum_{j=1}^r V_j} \sum_{j=1}^r h(z_j^*) V_j \,|\, X_1^*, \ldots, X_m^*),\ \mathcal{L}(\int h dF\,)\,) = 0$$

quando F è un processo DF di parametro $k\beta$.

La dimostrazione della proposizione è immediata e discende dal Teorema di Glivenko-Cantelli e dal Lemma 2.2.1.

Resta da vedere quali siano le funzioni h per le quali la Condizione 3.0.1 è soddisfatta. Un'ampia classe di funzioni che la soddisfano è stata individuata da Hannum, Hollander e Langberg (1981); a questa classe appartengono tutte le h limitate e continue quasi certamente rispetto alla misura di probabilità indotta in $\Re$ dalla funzione di ripartizione β.

A conclusione di questo paragrafo vogliamo proporre un metodo di ricampionamento la cui giustificazione si fonda sulle precedenti considerazioni.

Supponiamo di aver osservato un campione $(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$ generato da una funzione di ripartizione aleatoria F selezionata da un processo DF di parametro kF_0, con F_0 funzione di ripartizione propria e $k > 0$. Sappiamo che F, a posteriori, è un processo DF di parametro $(n+k)\alpha = kF_0 + nF_n$, con F_n funzione di ripartizione empirica generata da $(x_1, \ldots, x_n)$. Per costruire una distribuzione che approssimi la $\mathcal{L}(\int hdF\,| X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$ viene suggerita la seguente procedura:

(i) Si generano m osservazioni $(x_1^*, \ldots, x_m^*)$ dalla funzione di ripartizione $\alpha = (n+k)^{-1}(kF_0 + nF_n)$ e si costruisce la funzione di ripartizione empirica F_m^* da esse generata. In particolare si individuano il supporto $\{z_1^*, \ldots, z_r^*\}$ di F_m^* e le probabilità p_j^* che la F_m^* attribuisce ai punti z_j^*, $j = 1, \ldots, r$;

(ii) Si generano $(v_1, \ldots, v_r)$ in modo tale che v_j sia realizzazione di una v.a. avente distribuzione Gamma$((n+k)p_j^*, 1)$;

(iii) Si calcola la quantità,

$$t = \frac{1}{\sum_{j=1}^r v_j} \sum_{j=1}^r v_j h(z_j^*);$$

(iv) I passi (i), (ii) e (iii) vengono ripetuti un numero s di volte ottenendo così le quantità $(t_1, \ldots, t_s)$.

(v) La funzione di ripartizione empirica generata dalle quantità $(t_1, \ldots, t_s)$ è una approssimazione della $\mathcal{L}(\int hdF \,|X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$.

Della procedura descritta nei punti (i) - (v) faremo uso nell'esempio che appare nel prossimo paragrafo.

4. Un esempio

Supposto di aver osservato due valori $x_1 = 0.1$ e $x_2 = 0.05$, vogliamo approssimare,

$$\mathcal{L}(\int x\,dF(x)|x_1, x_2) \tag{13}$$

quando F è un processo DF di parametro kF_0 e F_0 è la funzione di ripartizione di una v.a. Uniforme su $[0, 1]$.

A tale scopo abbiamo fatto uso di due simulazioni. La prima segue la procedura descritta nel paragrafo precedente, mentre la seconda, effettuata a scopo di confronto, utilizza una catena di Markov così come suggerito da Korwar e Hollander (1973).

Per la prima simulazione abbiamo fissato $m = 300$ ed $s = 5000$. Per la seconda simulazione abbiamo calcolato 5000 volte la media di un campione di ampiezza 300 generato per mezzo di una catena di Markov dal processo DF a posteriori e quindi abbiamo considerato la f.d.r. empirica delle medie così ottenute come approssimazione della distribuzione (13). Le simulazioni sono state effettuate con Mathematica 2.0 (Wolfram, 1991).

I risultati ottenuti per diversi valori di k sono riassunti nella Tabella 1; oltre alla media e alla mediana vengono riportati i quantili 75-esimo e 95-esimo della (13). In parentesi quadra appaiono i valori esatti per le medie, in parentesi tonda quelli relativi alla seconda simulazione. Si osservi che per $k = 0$ si ha il caso del bootstrap bayesiano di Rubin; in questo caso si può verificare analiticamente che la (13) è la f.d.r di una v.a. Uniforme su $[0.05, 0.1]$.

5. Ringraziamenti

Gli autori ringraziano la School of Statistics e l'Institute for Mathematics and its Applications della University of Minnesota per l'ospitalità offerta durante il completamento di questo lavoro. La ricerca di P. Muliere è stata finanziata con contributo C.N.R. AI93.00382.10.

	Media	Mediana	$q_{.75}$	$q_{.95}$
k=0	[0.0750] 0.0747 (0.0749)	0.0745 (0.0750)	0.0871 (0.0872)	0.0975 (0.0973)
k=1	[0.2166] 0.2156 (0.2152)	0.1789 (0.1786)	0.2813 (0.2815)	0.4770 (0.4804)
k=2	[0.2875] 0.2888 (0.2862)	0.2675 (0.2654)	0.3688 (0.3667)	0.5462 (0.5279)
k=100	[0.4916] 0.4918 (0.4891)	0.4918 (0.4893)	0.5156 (0.5114)	0.5451 (0.5431)

Tab. 1: Risultati ottenuti nelle due simulazioni.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

CIFARELLI D.M., REGAZZINI E. (1990), "Distribution functions of means of a Dirichlet process", The Annals of Statistics, 18(1),p. 429–442.

EFRON B. (1979), "Bootstrap methods: another look at the jacknife", The Annals of Statistics, 7(1), p. 1–26.

FERGUSON T.S. (1973), "A bayesian analysis of some nonparametric problems", The Annals of Statistics, 1(2), p. 209–230.

HANNUM R.C., HOLLANDER, M., LANGBERG N.A. (1981), "Distributional results for random functionals of a Dirichlet process", The Annals of Probability, 9(4), p. 665–670.

KORWAR R.M., HOLLANDER M. (1973), "Contributions to the theory of Dirichlet processes", The Annals of Probability, 1(4), p. 705–711.

LO A.Y. (1987), "A large sample study of the bayesian bootstrap", The Annals of Statistics, 15(1), p. 360–375.

LO A.Y. (1991), "A characterization of the Dirichlet process", Statistics and Probability Letters, 12(3), p. 185–187.

MULIERE P., SECCHI P. (1992), "Exchangeability, predictive sufficiency and bayesian bootstrap", Journal of the Italian Statistical Society, 1(3), p. 377–404.

REGAZZINI E. (1978), "Intorno ad alcune questioni relative alla definizione del premio secondo la teoria della credibilità", Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, p. 77–89.

RUBIN D.B. (1981), "The bayesian bootstrap", The Annals of Statistics, 9(1), p. 130–134.

WOLFRAM S. (1991), Mathematica: a system for doing mathematics by computer, Addison–Wesley.