11

METRON

RIVISTA INTERNAZIONALE DI STATISTICA — REVUE INTERNATIONALE DE STATISTIQUE
INTERNATIONAL JOURNAL OF STATISTICS — INTERNATIONALE STATISTISCHE ZEITSCHRIFT
REVISTA INTERNACIONAL DE ESTADISTICA

DIRETTORE — DIRECTEUR — EDITOR — HERAUSGEBER — DIRECTOR

Carlo Benedetti

COMITATO DIRETTIVO — COMITE DE DIRECTION — EDITORIAL COMMITTEE
DIREKTION-KOMITEE — COMITE DIRECTIVO

E.P. Billeter, Villars-sur-Glane (Suisse); **Z.W. Birnbaum**, Seattle (U.S.A.); **V. Castellano**, Roma (Italia); **C. Dagum**, Ottawa (Canada); **D. Dugué**, Paris (France); **N. Georgescu-Roegen**, Nashville (U.S.A.); **M.P. Geppert**, Tübingen (Deutschland); **B. Gil**, Jerusalem (Israel); **A. Herzel**, Roma (Italia); **N.L. Johnson**, Chapel Hill (U.S.A.); **A.A. Konüs**, Moskva (U.R.S.S.); **G. Leti**, Roma (Italia); **A. Rizzi**, Roma (Italia); **T. Salvemini**, Roma (Italia); **P. Steriotis**, Athens (Greece); **P. Whittle**, Cambridge (Great Britain); **H. Wold**, Stockholm (Sweden); **R. Yüceulug**, Ankara (Turkey).

REDATTORE CAPO — REDACTEUR EN CHEF — EXECUTIVE EDITOR — CHEFREDAKTEUR
JEFE DE REDACCION

M. Badaloni

SEGRETARI DI REDAZIONE — SECRETAIRES DE REDACTION
EDITORIAL SECRETARIES — REDAKTIONSSCRETAERE — SECRETARIOS DE REDACCION

S. Bolasco, S. Buscemi, A. Crescimanni, J. Mortera, E. Vinci

Vol. XLIV - N. 1-4

31 - XII - 1986

E. CASTAGNOLI - P. MULIERE

**Sulle trasformate integrali di funzioni
di ripartizione**

DIPARTIMENTO DI STATISTICA, PROBABILITA' E STATISTICHE APPLICATE
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA « LA SAPIENZA »

E. CASTAGNOLI ⁽²⁾ - P. MULIERE ⁽³⁾

Sulle trasformate integrali di funzioni di ripartizione ⁽¹⁾

SOMMARIO: 1. Premessa. — 2. Definizioni di base e formulazione del problema. — 3. Soluzione dell'equazione funzionale nella quale si può riassumere il problema nel caso di f.r. di v.a. degeneri. — 4. Alcune osservazioni sul sistema di soluzioni dell'equazione funzionale. — 5. Una soluzione del problema. — 6. Esempi classici e non. — 7. Riottenimento di alcuni risultati noti. — 8. Conclusioni. Bibliografia. Riassunto. Summary. Parole chiave.

1. PREMESSA

In questo lavoro discutiamo, in maniera che ci pare sufficientemente generale, delle trasformate integrali. Siamo dell'idea che questo strumento possa essere efficacemente utilizzato per affrontare numerosi problemi statistici e non, spesso con vantaggi di semplicità e di chiarezza. Per una efficace disamina delle motivazioni che rendono rilevante l'uso di trasformate integrali in Statistica rinviamo a Springer (1979). Ci limitiamo qui a citare un paio tra le più note possibilità applicative di carattere statistico:

1) La distribuzione di probabilità di funzioni campionarie, importanti in molte questioni di inferenza statistica, può essere utilmente ottenuta attraverso trasformate integrali. Il caso più semplice è la ricerca

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'ambito dello GNAFA-CNR con il parziale contributo del Ministero della Pubblica Istruzione.

⁽²⁾ Istituto di Metodi Quantitativi, Università Bocconi, Milano.

⁽³⁾ Istituto di Scienze Economiche e Statistiche, Università degli Studi di Pavia.

della distribuzione della media aritmetica campionaria che si può facilmente ottenere tramite la trasformata di Laplace-Fourier.

La distribuzione della media geometrica campionaria (interessante, ad esempio, a proposito di numeri indici) è ottenibile invece attraverso la trasformata di Mellin.

2) Tra i molti utilizzabili, il metodo che ci pare più diretto e più semplice per ottenere le distribuzioni di t , F e *chi*-quadrato utilizza ancora trasformate integrali: di Mellin per t e F , di Laplace-Fourier per *chi*-quadrato.

Questi esempi, come molti altri che si potrebbero fare, si fondano, com'è ovvio, sulla possibilità di descrivere attraverso la trasformata di Laplace-Fourier la distribuzione della somma o della differenza di variabili aleatorie e attraverso la trasformata di Mellin la distribuzione del prodotto e del quoziente di variabili aleatorie.

Vale la pena di sottolineare che problemi riconducibili a somme, differenze, prodotti e quozienti di variabili aleatorie sono frequenti anche in ambiti non statistici. Un esempio classico riguarda l'affidabilità di un sistema formato da n sottosistemi collegati in serie: si veda in proposito, ad esempio, Springer e Thompson (1967), (1968). Applicazioni di carattere economico si possono trovare, tra gli altri, in Mandelbrot (1961) ed Hill e Buck (1974), applicazioni di carattere ingegneristico in Webb (1965) ed una interessante applicazione di natura finanziaria in Stelson (1956).

Nella teoria delle decisioni si definisce utilità attesa di un risultato aleatorio:

$$\int u(x, a) dF(x)$$

essendo u la funzione d'utilità prescelta che può dipendere da un parametro a ed F la funzione di ripartizione del risultato aleatorio. Tale utilità attesa altri non è se non una trasformata integrale della funzione di ripartizione F .

In Matematica finanziaria, dove gli esempi potrebbero essere moltissimi, il valore attuale medio di un capitale C con scadenza aleatoria è:

$$\int_{\mathcal{R}} C \psi(t, \alpha) dG(t)$$

dove ψ è il fattore di sconto impiegato dipendente da un parametro che

spesso ha la natura di tasso e G è la funzione di ripartizione della scadenza. Anche tale valore attuale è una trasformata integrale.

Gli esempi ed i riferimenti potrebbero continuare: tutte le volte che interessi discutere di una variabile aleatoria ottenuta con operazioni su altre variabili aleatorie si può far ricorso a trasformate integrali, spesso con vantaggi di semplicità e di naturalezza.

Scopo del nostro lavoro è di affrontare in maniera unitaria e generale questo tema. Pur non presentando qui delle reali applicazioni, sulle quali peraltro ci ripromettiamo di soffermarci quanto prima, ci pare il caso di fare qualche considerazione di fondo sulle possibilità applicative:

(i) Spesso il problema suggerisce, o impone, il tipo di operazioni da effettuare sulle variabili aleatorie. In tal caso ci si chiede se esistono, ed in caso affermativo quali sono, trasformate integrali compatibili con tali operazioni.

(ii) Talvolta invece il problema suggerisce il tipo di trasformate integrali da utilizzare, tipicamente perché si prestano ad una immediata interpretazione. Ci si può chiedere allora se vi sono, e quali siano, le operazioni sulle variabili aleatorie compatibili con tali trasformate.

A simili domande abbiamo cercato di fornire risposte.

Vogliamo da ultimo rilevare esplicitamente la notevole importanza delle trasformate delle funzioni di ripartizione di variabili aleatorie degeneri che non sono altro che il « nucleo » delle trasformate integrali.

Da questo lavoro emerge, come del resto è naturale, che vi sono intimi legami tra il tipo di operazioni ed il nucleo delle trasformate che si possono esplicitamente cogliere in maniera immediata proprio nelle trasformate delle funzioni di ripartizione di variabili aleatorie degeneri. Il problema della scelta del nucleo è da tempo presente in letteratura ed è stato affrontato da diversi autori: Lukacs (1970), Savage (1971) e parecchi altri.

Lo schema del lavoro è il seguente. Nel n. 2 presenteremo le definizioni di base e formuleremo il problema che si traduce in una equazione funzionale. Nel n. 3 ne daremo una soluzione accompagnandola con alcune osservazioni e proporremo anche una possibile generalizzazione (n. 4). Nel n. 5 risolveremo compiutamente il problema iniziale sfruttando la linearità delle trasformate integrali. Dopo aver presentato alcuni esempi (n. 6), nel n. 7 mostreremo come si possano facilmente riottenere alcuni risultati nostri e di altri Autori.

2. DEFINIZIONI DI BASE E FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Sia X una variabile aleatoria (v.a.) unidimensionale a valori in un intervallo $A \subseteq R$ e sia F la sua funzione di ripartizione (f.r.). Sia ancora S un insieme arbitrario ma non vuoto ⁽¹⁾ e G una funzione, a valori reali o complessi, definita su $A \times S$.

Chiamiamo *trasformata integrale* (o brevemente *trasformata*) di F con nucleo G la funzione di s :

$$f_X(s) = \int_A G(x, s) dF(x) \quad s \in S$$

quando l'integrale esista (finito) per qualche $s \in S$.

Diciamo A' l'insieme dei valori assunti dalla trasformata. Nel seguito ci limiteremo ai casi nei quali vi sia corrispondenza biunivoca tra trasformata e f.r.

Vale la pena di osservare che non abbiamo richiesto né che la trasformata esista per ogni f.r. né che, esistendo, sia definita per ogni $s \in S$. Ciò potrà in molti casi essere giudicato opportuno ma non ci pare logicamente necessario in generale. La corrispondenza biunivoca della quale abbiamo detto va dunque intesa limitatamente ai casi nei quali la trasformata esiste.

Facciamo subito rilevare che la trasformata della f.r. di una v.a. degenerare in x (cioè tale che $F(t) = 0$ per $t < x$ e $F(t) = 1$ per $t \geq x$) non è altro che $G(x, s)$.

Il nucleo appare dunque come la trasformata della f.r. di una generica v.a. degenerare ⁽²⁾ e permette di intendere la trasformata di ogni F come la media, con funzioni dei pesi F , delle trasformate delle f.r. di v.a. degeneri:

$$f_X(s) = E(G(X, s))$$

Consideriamo ora due operazioni che indicheremo con:

$$a \circ b = \psi(a, b)$$

$$a * b = T(a, b)$$

rispettivamente definite per ogni $a, b \in A$ e per ogni $a, b \in A'$.

⁽¹⁾ Risultano particolarmente interessanti i casi $S = R$, $S = C$, $S = R^n$ ma preferiamo pensare, almeno in sede di impostazione generale, a S come arbitrario.

⁽²⁾ Il fatto che G sia definita su $A \times S$ consente di affermare che la trasformata di f.r. di v.a. degeneri esiste sempre ed è definita per ogni $s \in S$.

Utilizzeremo la prima operazione su v.a. indipendenti: $X \circ Y = \psi(X, Y)$ è così la v.a. ottenuta componendo, tramite $\circ$, le due v.a. X e Y . Utilizzeremo invece la seconda sulle trasformate.

La domanda alla quale intendiamo fornire una risposta è la seguente: esistono terne di trasformate f^1, f^2, f^3 tali che:

$$f_{X \circ Y}^1(s) = f_X^2(s) * f_Y^3(s) \quad (1)$$

cioè tali che la trasformata della f.r. di $X \circ Y$ si può ottenere dalla semplice conoscenza delle due trasformate (eventualmente con diverso nucleo) delle f.r. di X e di Y ?

3. SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE FUNZIONALE NELLA QUALE SI PUO' RIASSUMERE IL PROBLEMA NEL CASO DI F.R. DI V.A. DEGENERI

Per le cose dette nel n. 2 possiamo iniziare con l'occuparci delle f.r. di v.a. degeneri, cioè dei nuclei delle trasformate, scrivendo in luogo della (1):

$$G_1(x \circ y, s) = G_2(x, s) * G_3(y, s) \quad x, y \in A, s \in S \quad (2)$$

essendo G_1, G_2, G_3 i nuclei rispettivamente di f^1, f^2, f^3 .

La (2) si può riscrivere:

$$G_1(\psi(x, y), s) = T(G_2(x, s), G_3(y, s)) \quad (3)$$

ed in questa forma è nota come « equazione generalizzata della distributività »⁽³⁾.

Il problema posto (relativamente alle f.r. di v.a. degeneri) è dunque equivalente a fornire un sistema di soluzioni della (3).

Sfruttando noti risultati sull'equazione generalizzata della distributività, possiamo dare il seguente:

TEOREMA. *Un sistema di soluzioni della (3) è:*

$$\begin{aligned} G_1(x, s) &= l(\alpha(s) g^{-1}(x) + \beta(s) + \gamma(s)) \\ \psi(x, y) &= g(h(x) + k(y)) \\ T(x, y) &= l(m(x) + n(y)) \\ G_2(x, s) &= m^{-1}(\alpha(s) h(x) + \beta(s)) \\ G_3(x, s) &= n^{-1}(\alpha(s) k(x) + \gamma(s)) \end{aligned} \quad (4)$$

⁽³⁾ Si possono vedere in proposito: Hosszú (1959), Belousov-Hosszú (1965), Aczél (1966), Belousov (1968), Stehling (1978), Lundberg (1982), (1985).

dove g, h, k, l, m, n sono arbitrarie funzioni strettamente monotone e α, β, γ sono funzioni del tutto arbitrarie.

Per di più le (4) rappresentano l'unico sistema di soluzioni locali se valgono le seguenti ipotesi:

- (i) $S = R$ oppure $S = R^n$;
- (ii) G_1, G_2, G_3 e T sono funzioni reali differenziabili con continuità per $s \neq 0$;
- (iii) $\partial T / \partial x \neq 0, \partial T / \partial y \neq 0, \partial G_i / \partial x \neq 0$ per $i = 1, 2, 3$;
- (iv) $G_2(x, 0)$ e $G_3(y, 0)$ sono costanti;
- (v) $G_2(x, c) = z, G_3(y, c) = u$ hanno un'unica soluzione in x e in y per $c \neq 0$

a patto di restringersi a funzioni $g, h, k, l, m, n, \alpha, \beta, \gamma$ differenziabili con continuità e purchè inoltre sia $\alpha(0) = 0$.

La prima parte del Teorema si può provare per semplice sostituzione; per la seconda (unicità) rinviamo ad Aczél (1966), pagg. 333 e seguenti.

4. ALCUNE OSSERVAZIONI SUL SISTEMA DI SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE FUNZIONALE

Nel sistema (4) di soluzioni della (3):

$$\begin{aligned} a \circ b &= \psi(a, b) = g(h(a) + k(b)) \\ a * b &= T(a, b) = l(m(a) + n(b)) \end{aligned}$$

possiamo intendere le due operazioni $\circ$ e $*$ come due « somme deformate »: in entrambe i due numeri a e b sono trasformati attraverso due funzioni monotone, i loro trasformati sono sommati e, da ultimo, tale somma è trasformata ancora tramite una funzione monotona.

Si può anche scrivere:

$$\begin{aligned} g^{-1}(a \circ b) &= h(a) + k(b) \\ l^{-1}(a * b) &= m(a) + n(b) \end{aligned} \tag{5}$$

Nel sistema (4) di soluzioni si ritrovano in G_1, G_2, G_3 le sei trasformazioni (tre per $\circ$ e tre per $*$) appena incontrate. Precisamente in G

compaiono le due (g e l) operanti sui « risultati », in G_2 le due (m e n) operanti sui « primi addendi » ed in G_3 le due (n e k) operanti sui « secondi addendi ».

La cosa è ancora più evidente se si scrive:

$$\begin{aligned} l^{-1}(G_1(x, s)) &= \alpha(s) g^{-1}(x) + \beta(s) + \gamma(s) \\ m(G_2(x, s)) &= \alpha(s) h(x) + \beta(s) \\ n(G_3(x, s)) &= \alpha(s) k(x) + \gamma(s) \end{aligned} \quad (6)$$

Nella (6) compaiono intatte le sei trasformazioni che si trovano nelle (5): quelle che compaiono « per colonna » nelle (5) si trovano « per riga » nelle (6) in ordine inverso.

Se si pone:

$$\begin{aligned} l^{-1}(G_1) &= \bar{G}_1 \\ m(G_2) &= \bar{G}_2 \\ n(G_3) &= \bar{G}_3 \end{aligned}$$

si può scrivere:

$$\begin{aligned} \bar{G}_1(\psi(x, y), s) &= \alpha(s) g^{-1}(\psi(x, y)) + \beta(s) + \gamma(s) = \\ &= \alpha(s) (h(x) + k(y)) + \beta(s) + \gamma(s) = \\ &= \bar{G}_2(x, s) + \bar{G}_3(x, s) \end{aligned}$$

che mostra, in modo diverso, la sottostante struttura additiva.

Quanto detto qui sopra e nel n. 3 consente di risolvere il più generale problema che coinvolge n v.a. anziché soltanto due:

esistono trasformate $f^0, f^1, f^2, \dots, f^n$ tali che:

$$f_{\psi(X_1, X_2, \dots, X_n)}^0(s) = T(f_{X_1}^1(s), f_{X_2}^2(s), \dots, f_{X_n}^n(s))$$

cioè tali che la trasformata della f.r. di $\psi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ si può ottenere dalla semplice conoscenza delle trasformate delle singole f.r. di $X_1, X_2, \dots, X_n$ dove $X_1, X_2, \dots, X_n$ sono v.a. unidimensionali indipendenti?

Ciò conduce (relativamente a f.r. di v.a. degeneri) alla seguente equazione funzionale:

$$G_0(\psi(x_1, x_2, \dots, x_n), s) = T(G_1(x_1, s), G_2(x_2, s), \dots, G_n(x_n, s))$$

Un sistema di soluzioni è il seguente:

$$\begin{aligned}\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= g(h_1(x_1) + h_2(x_2) + \dots + h_n(x_n)) \\ T(x_1, x_2, \dots, x_n) &= l(m_1(x_1) + m_2(x_2) + \dots + m_n(x_n)) \\ G_0(x, s) &= l(\alpha_0(s) g^{-1}(x) + \alpha_1(s) + \alpha_2(s) + \dots + \alpha_n(s)) \\ G_i(x, s) &= m_i^{-1}(\alpha_0(s) h_i(x) + \alpha_i(s)) \quad (i = 1, 2, \dots, n)\end{aligned}$$

con g, h_i, l, m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) arbitrarie funzioni strettamente monotone e α_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) funzioni del tutto arbitrarie.

5. UNA SOLUZIONE DEL PROBLEMA

Le soluzioni del problema che ci siamo posti nel n. 2 vanno evidentemente ricercate tra le (4). Le funzioni l, g, m, n, h, k che ivi comparivano erano arbitrarie funzioni strettamente monotone se ci si limitava a f.r. di v.a. degeneri. Come vedremo tali non possono più essere nel caso di f.r. qualsiasi, vista la linearità di qualunque trasformata integrale sotto mistura.

Se infatti Z è la v.a. con f.r. $pF_X + (1-p)F_Y$, mistura con pesi p e $(1-p)$ ($0 < p < 1$) di F_X e di F_Y , riesce:

$$f_Z(s) = pf_X(s) + (1-p)f_Y(s)$$

Supponiamo che la f.r. di X sia mistura delle f.r. di X_1 e di X_2 con pesi p e $(1-p)$ ($0 < p < 1$). In tal caso la f.r. di $\psi(X, Y)$ è mistura, con gli stessi pesi, delle f.r. di $\psi(X_1, Y)$ e di $\psi(X_2, Y)$. Per le corrispondenti trasformate risulta evidentemente:

$$f_{\psi(X, Y)}^1(s) = pf_{\psi(X_1, Y)}^1(s) + (1-p)f_{\psi(X_2, Y)}^1(s)$$

e anche

$$f_X^2(s) = pf_{X_1}^2(s) + (1-p)f_{X_2}^2(s)$$

La (1) diventa allora:

$$pf_{\psi(X_1, Y)}^1(s) + (1-p)f_{\psi(X_2, Y)}^1(s) = T(pf_{X_1}^2(s) + (1-p)f_{X_2}^2(s), f_Y^3(s))$$

Utilizzando la (1) su $f_{\psi(X_1, Y)}^1(s)$ e $f_{\psi(X_2, Y)}^1(s)$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}pT(f_{X_1}^2(s), f_Y^3(s)) + (1-p)T(f_{X_2}^2(s), f_Y^3(s)) &= \\ &= T(pf_{X_1}^2(s) + (1-p)f_{X_2}^2(s), f_Y^3(s))\end{aligned}$$

Posto infine $u = f_{x_1}^2(s)$, $v = f_{x_2}^2(s)$, $z = f_Y^3(s)$, l'ultima uguaglianza si scrive

$$p T(u, z) + (1 - p) T(v, z) = T(pu + (1 - p)v, z)$$

che è una versione dell'equazione funzionale di Cauchy avente soluzione:

$$T(u, z) = A(z) + B(z)u$$

che, in ipotesi di misurabilità di T , è anche l'unica. T è dunque lineare (affine) nella prima variabile. Ripetendo il ragionamento quando la f.r. di Y sia mistura di due f.r., si vede che T è lineare (affine) anche nella seconda variabile e perciò:

$$T(u, z) = Auz + Bu + Cz + D$$

con A, B, C, D costanti arbitrarie.

Per la successiva discussione distinguiamo due casi ($A \neq 0$), ($A = 0$).

I Caso. ($A \neq 0$).

Possiamo scrivere:

$$T(x, y) = (a + bx)(c + dy).$$

Dato che T , secondo la (4), era del tipo

$$T(x, y) = l(m(x) + n(y))$$

possiamo sempre pensare che:

$$l(x) = e^x; m(x) = \log(a + bx); n(y) = \log(c + dy); \\ (x > -a/b, y > -c/d)$$

La (3):

$$G_1(\psi(x, y), s) = T(G_2(x, s), G_3(y, s))$$

tenuto conto di ciò che già sappiamo di G_1, G_2, G_3, ψ e della forma ora individuata di T , diventa:

$$\exp(\alpha(s)g^{-1}(g(h(x) + k(y)) + \beta(s) + \gamma(s)) = \\ = \exp(\alpha(s)h(x) + \beta(s)) \exp(\alpha(s)k(y) + \gamma(s))$$

che è soddisfatta per ogni scelta di g, h, k (strettamente monotone) e α, β, γ .

Possiamo dunque concludere che in questo caso una risposta al nostro problema è la seguente:

$$\begin{aligned} G_1(x, s) &= \exp(\alpha(s) g^{-1}(x) + \beta(s) + \gamma(s)) \\ G_2(x, s) &= \exp\{(\alpha(s) h(x) + \beta(s)) - a\} / b \\ G_3(x, s) &= \exp\{(\alpha(s) k(x) + \gamma(s)) - c\} / d \\ \psi(x, y) &= g(h(x) + k(y)) \\ T(x, y) &= (a + bx)(c + dy) \end{aligned}$$

con g, h, k arbitrarie funzioni strettamente monotone, α, β, γ funzioni arbitrarie e a, b, c, d costanti arbitrarie ($b, d \neq 0$).

II Caso. ($A = 0$)

Si ha

$$T(x, y) = Bx + Cy + D$$

dove, per evitare banalità, supporremo $B \neq 0, C \neq 0$.

Dato che, secondo la (4), T era del tipo

$$T(x, y) = l(m(x) + n(y))$$

possiamo sempre prendere

$$l(x) = x + D; m(x) = Bx; n(y) = Cy.$$

La (3) diventa:

$$\begin{aligned} \alpha(s) g^{-1}(g(h(x) + k(y)) + \beta(s) + \gamma(s) &= \\ = \alpha(s) h(x) + \beta(s) + \alpha(s) k(y) + \gamma(s). \end{aligned}$$

che è soddisfatta per ogni scelta di g, h, k (strettamente monotone) e α, β, γ .

In questo caso una risposta al nostro problema è:

$$\begin{aligned} G_1(x, y) &= \alpha(s) g^{-1}(x) + \beta(s) + \gamma(s) + D \\ G_2(x, y) &= (1/B)(\alpha(s) h(x) + \beta(s)) \\ G_3(x, y) &= (1/C)(\alpha(s) k(x) + \gamma(s)) \\ \psi(x, y) &= g(h(x) + k(y)) \\ T(x, y) &= Bx + Cy + D \end{aligned}$$

con g, h, k arbitrarie funzioni strettamente monotone, α, β, γ , funzioni arbitrarie e B, C, D costanti arbitrarie ($B, C \neq 0$).

Nel caso più generale indicato al n. 4 è facile ripercorrere la via indicata giungendo a sistemi di soluzioni analoghi a quelli ora visti.

Appare evidente che la linearità delle trasformate integrali sotto mistura impone restrizioni sulla operazione $*$, ovvero sulla funzione T che può essere soltanto del tipo $T(x, y) = Axy + Bx + Cy + D$. Non vi sono invece restrizioni sull'operazione $\circ$ da effettuare sulle v.a. Si può osservare che se l'operazione $\psi(x, y)$ è associativa e rappresentata da:

$$\psi(x, y) = q^{-1}(q(x) + q(y))$$

con q funzione continua, strettamente monotona e di codominio chiuso rispetto all'addizione i nuclei delle tre trasformate hanno la stessa struttura.

Vogliamo da ultimo rilevare che, quando la domanda che ci siamo posti nel n. 3 sia determinata da un problema preciso, può darsi:

(i) che il problema suggerisca il tipo di operazioni da effettuare ed in tal caso il sistema (4) indica se vi sono, ed in caso affermativo quali sono, trasformate compatibili con tali operazioni; oppure:

(ii) che il problema suggerisca il tipo di trasformate da utilizzare ed in tal caso il sistema (4) indica, se vi sono, le operazioni con esse compatibili.

Su questi aspetti, rivolti a possibili applicazioni, ci ripromettiamo di tornare in futuro.

6. ESEMPI CLASSICI E NON

6.1. Si assuma:

$$\psi(x, y) = x + y; T(x, y) = xy; A = S = R$$

cioè si voglia che la trasformata della f.r. della somma di due v.a. (indipendenti e a valori reali) sia uguale al prodotto delle due trasformate. Si osservi che la scelta fatta per T soddisfa i requisiti riconosciuti come necessari nel precedente n. 5.

L'ipotesi si può tradurre nell'imposizione che, nelle (4), sia:

$$\begin{aligned} g(x) &= h(x) = k(x) = x \\ l(x) &= e^x; m(x) = n(x) = \log x \end{aligned}$$

Le tre funzioni G_1, G_2, G_3 (nuclei delle trasformate) sono allora:

$$G_1(x, s) = \exp(\alpha(s)x + \beta(s) + \gamma(s))$$

$$G_2(x, s) = \exp(\alpha(s)x + \beta(s))$$

$$G_3(x, s) = \exp(\alpha(s)x + \gamma(s))$$

Se poi si chiede che le trasformate coincidano ($G_1 = G_2 = G_3 = G$) si vede subito che dev'essere $\beta(s) = \gamma(s) = 0$ e quindi:

$$G(x, s) = \exp(\alpha(s)x)$$

con α funzione reale o complessa di s .

(i) Se α è funzione complessa: $\alpha(s) = B(s) + iA(s)$ e se si vuole che $G(x, s)$ sia limitata, essendo:

$$|G(x, s)| = |\exp(B(s)x)| \cdot |\exp(iA(s)x)|$$

dev'essere $B(s) = 0$ per ogni $s \in R$ e quindi:

$$G(x, s) = \exp(iA(s)x)$$

che è, in sostanza, il nucleo della trasformata di Laplace-Fourier. Si veda in proposito il Teorema 4.6.1 di Lukacs (1970), pag. 100; egli dimostra altresì che, perché vi sia corrispondenza biunivoca tra trasformate e f.r., i valori di $|A(s)|$ devono formare un insieme denso in $(0, +\infty)$.

(ii) Se α è funzione reale:

$$G(x, s) = \exp(\alpha(s)x)$$

che è, in sostanza, il nucleo della usuale funzione generatrice dei momenti.

6.2. Si assuma:

$$\psi(x, y) = xy; T(x, y) = xy; A = R_+; S = C$$

cioè si voglia che la trasformata della f.r. del prodotto di due v.a. (indipendenti e a valori positivi) sia uguale al prodotto delle trasformate. Si osservi che, come nell'esempio precedente, T soddisfa i requisiti del n. 5.

L'ipotesi si può tradurre in:

$$g(x) = l(x) = e^x$$

$$h(x) = k(x) = m(x) = n(x) = \log x$$

I nuclei delle trasformate sono allora:

$$G_1(x, s) = \exp(\alpha(s) \log x + \beta(s) + \gamma(s)) = B(s) C(s) x^{\alpha(s)}$$

$$G_2(x, s) = \exp(\alpha(s) \log x + \beta(s)) = B(s) x^{\alpha(s)}$$

$$G_3(x, s) = \exp(\alpha(s) \log x + \gamma(s)) = C(s) x^{\alpha(s)}$$

Se si vuole coincidenza tra le tre trasformate ($G_1 = G_2 = G_3 = G$), deve essere $B(s) = C(s) = 1$ e quindi

$$G(x, s) = x^{\alpha(s)}$$

(i) Se α è una funzione complessa, si ha, in sostanza, il nucleo della trasformata di Mellin. Con $\alpha(s) = s - 1$ si ha anzi esattamente la trasformata di Mellin.

(ii) Se α è funzione reale la trasformata non è altro che il momento di ordine α della sottostante v.a.

6.3. Si assuma:

$$\psi(x, y) = y/x; T(x, y) = xy; A = R_+; S = C$$

cioè si voglia che la trasformata della f.r. del quoziente di due v.a. (indipendenti e a valori positivi) sia uguale al prodotto delle trasformate.

L'ipotesi si può tradurre in:

$$g(x) = e^x; h(x) = \log x; k(x) = -\log x$$

$$l(x) = e^x; m(x) = n(x) = \log x$$

Le tre funzioni G_1, G_2, G_3 sono:

$$G_1(x, s) = \exp(\alpha(s) \log x + \beta(s) + \gamma(s)) = B(s) C(s) x^{\alpha(s)}$$

$$G_2(x, s) = \exp(\alpha(s) \log x + \beta(s)) = B(s) x^{\alpha(s)}$$

$$G_3(x, s) = \exp(-\alpha(s) \log x + \gamma(s)) = C(s) x^{-\alpha(s)}$$

6.4. Si assuma:

$$\psi(x, y) = x + y; T(x, y) = x + y; A = S = R$$

che si può tradurre in:

$$g(x) = l(x) = h(x) = k(x) = m(x) = n(x) = x$$

Le tre funzioni G_1, G_2, G_3 sono allora:

$$G_1(x, s) = \alpha(s)x + \beta(s) + \gamma(s)$$

$$G_2(x, s) = \alpha(s)x + \beta(s)$$

$$G_3(x, s) = \alpha(s)x + \gamma(s)$$

Se si vuole la coincidenza tra G_1, G_2, G_3 , deve essere $\beta(s) = \gamma(s) = 0$ e perciò:

$$G(x, s) = \alpha(s)x$$

che mostra come l'unica « trasformata additiva » sia sostanzialmente la media.

6.5. Si assuma:

$$\psi(x, y) = x e^y; T(x, y) = xy; A = S = R$$

che si può tradurre in:

$$g(x) = e^x; h(x) = \log x; k(x) = x$$

$$l(x) = e^x; m(x) = n(x) = \log x$$

Le tre funzioni G_1, G_2, G_3 sono allora

$$G_1(x, s) = \exp(\alpha(s) \log x + \beta(s) + \gamma(s)) = B(s) C(s) x^{\alpha(s)}$$

$$G_2(x, s) = \exp(\alpha(s) \log x + \beta(s)) = B(s) x^{\alpha(s)}$$

$$G_3(x, s) = \exp(\alpha(s) x + \gamma(s)) = C(s) e^{\alpha(s)x}$$

Con $T(x, y) = x + y$ si sarebbe ottenuto:

$$G_1(x, s) = \alpha(s) \log x + \beta(s) + \gamma(s)$$

$$G_2(x, s) = \alpha(s) \log x + \beta(s)$$

$$G_3(x, s) = \alpha(s) x + \gamma(s)$$

6.6. Si assuma:

$$\psi(x, y) = \frac{xy}{x+y}; T(x, y) = xy; A = R_+; S = R$$

che si può tradurre in:

$$g(x) = h(x) = k(x) = 1/x$$

$$l(x) = e^x; m(x) = n(x) = \log x$$

Le tre funzioni G_1, G_2, G_3 sono:

$$G_1(x, s) = \exp(\alpha(s)/x + \beta(s) + \gamma(s))$$

$$G_2(x, s) = \exp(\alpha(s)/x + \beta(s))$$

$$G_3(x, s) = \exp(\alpha(s)/x + \gamma(s))$$

6.7. Si assuma:

$$\psi(x, y) = (x^p + y^p)^{1/p} \quad (p > 0)$$

$$T(x, y) = xy; \quad A = R_+; \quad S = R$$

che si può tradurre in:

$$g(x) = x^{1/p}; \quad h(x) = k(x) = x^p$$

$$l(x) = e^x; \quad m(x) = n(x) = \log x$$

Le tre funzioni G_1, G_2, G_3 sono allora:

$$G_1(x, s) = \exp(\alpha(s) x^p + \beta(s) + \gamma(s))$$

$$G_2(x, s) = \exp(\alpha(s) x^p + \beta(s))$$

$$G_3(x, s) = \exp(\alpha(s) x^p + \gamma(s))$$

Se $T(x, y) = x + y$ si ha:

$$G_1(x, s) = \alpha(s) x^p + \beta(s) + \gamma(s)$$

$$G_2(x, s) = \alpha(s) x^p + \beta(s)$$

$$G_3(x, s) = \alpha(s) x^p + \gamma(s)$$

Questi esempi suggeriscono qualche riflessione:

a) L'operazione $\circ$ può essere associativa come negli esempi 6.1, 6.2, 6.4, 6.6, 6.7 o no come in 6.3 e 6.5. Nella prima eventualità i nuclei delle tre trasformate hanno la stessa struttura e si può addirittura imporre che coincidano. Nella seconda eventualità i nuclei sono invece strutturalmente diversi e non avrebbe senso imporre la loro coincidenza.

b) Dagli esempi 6.1, 6.2, 6.3 appare in maniera evidente come lo strumento per studiare la distribuzione della somma (o differenza), prodotto o quoziente di v.a. sia una ben precisa trasformata integrale (di Laplace-Fourier per la somma, di Mellin per il prodotto ed il quoziente) e anzi come questi non siano che casi particolari di un unico problema (si veda, per esempio, Epstein (1948), Hladik (1969), Springer (1979)).

c) È anche evidente come si possano riproporre gli stessi esempi qui visti o altri analoghi relativamente a operazioni che coinvolgano n v.a. il che lascia intravedere altre possibilità applicative dei risultati qui

presentati, per esempio, alla ricerca di distribuzioni di funzioni campionario (si veda, tra gli altri, Lukacs (1963) Lukacs-Laha (1964), Ramachandran (1967) Kagan-Linnik-Rao (1973)).

7. RIOTTENIMENTO DI ALCUNI RISULTATI NOTI

7.1. Castagnoli (1973/1974) ha affrontato il seguente problema: esistono coppie di operazioni $\circ$ e di trasformate f tali che:

$$f_{X \circ Y}(s) = f_X(s) \cdot f_Y(s)$$

cioè tali che la trasformata della v.a. $X \circ Y = \psi(X, Y)$ sia uguale al prodotto delle due trasformate di X e di Y (X ed Y indipendenti)? Si noti che la scelta fatta di T (il prodotto) soddisfa i requisiti indicati nel n. 5.

Con la simbologia del n. 3 si impone che:

(i) $G_1 = G_2 = G_3 = G$ che implica:

$$l(x) = m^{-1}(x) = n^{-1}(x); g^{-1}(x) = h(x) = k(x); \beta = \gamma = 0$$

(ii) $T(x, y) = xy$ che può tradursi in:

$$l(x) = e^x; m(x) = n(x) = \log x$$

Dunque il sistema (4) di soluzioni si riduce a:

$$G(x, s) = \exp(\alpha(s) g^{-1}(x))$$

$$\psi(x, y) = g(g^{-1}(x) + g^{-1}(y))$$

7.2. Castagnoli-Muliere (1984) hanno affrontato il problema dell'esistenza di funzioni G_1, G_2, G_3, ψ, T tali che:

$$E(G_1(\psi(X, Y))) = T(E(G_2(X)), E(G_3(Y)))$$

In questo caso i « nuclei » G_1, G_2, G_3 sono indipendenti da s : ciò fa degenerare in costanti le funzioni α, β, γ nelle (4). Sono allora soluzioni del problema di Castagnoli-Muliere le seguenti:

I Caso

$$G_1(x) = \exp(\alpha g^{-1}(x) + \beta + \gamma)$$

$$G_2(x) = \exp\{(\alpha h(x) + \beta) - a\} / b$$

$$G_3(x) = \exp\{(\alpha k(x) + \gamma) - c\} / d$$

$$\psi(x, y) = g(h(x) + k(y))$$

$$T(x, y) = (a + b x)(c + d y)$$

Scritto per semplicità x in luogo di $a + bx$ e y in luogo di $c + dy$ diventano:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= xy \\ \psi(x, y) &= g(h(x) + k(y)) \\ G_1(x) &= Q P e^{h(x)} \\ G_2(x) &= Q e^{h(x)} \\ G_3(x) &= P e^{k(x)} \end{aligned}$$

II Caso

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \alpha g^{-1}(x) + \beta + \gamma + D \\ G_2(x) &= (1/B)(\alpha h(x) + \beta) \\ G_3(x) &= (1/C)(\alpha k(x) + \gamma) \\ \psi(x, y) &= g(h(x) + k(y)) \\ T(x, y) &= Bx + Cy + D \end{aligned}$$

che è come scrivere, con la notazione precedente,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= x + y \\ \psi(x, y) &= g(h(x) + k(y)) \\ G_1(x) &= \alpha g^{-1}(x) + \beta + \gamma \\ G_2(x) &= \alpha h(x) + \beta \\ G_3(x) &= \alpha k(x) + \gamma \end{aligned}$$

Le soluzioni date da Castagnoli-Muliere (1984) sono un caso particolare di quelle qui sopra indicate: Castagnoli-Muliere, avendo sostanzialmente richiesto l'associatività dell'operazione $\circ$, si riducevano a priori al solo caso $h(x) = k(x) = g^{-1}(x)$.

Precedentemente Muliere (1984) aveva considerato il caso particolare con $G_1 = G_2 = G_3 = G$.

7.3. Ancora in precedenza Savage (1971) aveva affrontato lo stesso problema di Castagnoli-Muliere con $G_1 = G_2 = G_3 = G$ e con $\psi(x, y) = x + y$:

$$E(G(X + Y)) = T(E(G(X)), E(G(Y)))$$

Per ottenere le soluzioni del problema di Savage basta fare le seguenti osservazioni:

I Caso

L'uguaglianza $G_1 = G_2 = G_3$ implica che $g^{-1}(x) = h(x) = k(x)$ e che $P = Q = 1$. Il fatto che $\psi(x, y) = x + y$ implica ancora $g(x) = x$, perciò le soluzioni sono:

$$\begin{aligned} G(x) &= e^{\alpha x} \\ T(x, y) &= xy \end{aligned}$$

II Caso

Dev'essere ancora $g^{-1} = h(x) = k(x)$ ed inoltre $\beta = \gamma = 0$ e $g(x) = x$. Perciò:

$$\begin{aligned} G(x) &= \alpha x \\ T(x, y) &= x + y \end{aligned}$$

Le soluzioni qui indicate coincidono a meno di trasformazioni lineari con quelle riportate da Savage (1971).

7.4. Peccati (1975) aveva invece affrontato il problema di determinare le coppie di operazioni $\circ$ e $*$ tali che:

$$E(X \circ Y) = E(X) * E(Y)$$

ovvero

$$E(\psi(X, Y)) = T(E(X), E(Y)) \quad (7)$$

per ogni coppia di v.a. indipendenti.

Qui $G_1 = G_2 = G_3$ sono addirittura la funzione identica, perciò si può sempre pensare:

$$l = m^{-1} = n^{-1} = h = k; \quad \beta = \gamma = 0 \quad \alpha = 1$$

Ne discende che:

$$\psi(x, y) = T(x, y) = g(g^{-1}(x) + g^{-1}(y))$$

Come si vede $\psi = T$: d'altra parte la cosa era ovvia fin dall'inizio visto che la (7), scritta per v.a. degeneri, diventa appunto $\psi(x, y) = T(x, y)$.

Tenuto conto di quanto detto nel n. 5 si ha:

I Caso

$$\psi(x, y) = T(x, y) = Axy + Bx + Cy + D$$

dove $B = C$ ed $AD = B^2 - B$ se si vuole che le due operazioni siano associative.

II Caso

$$\psi(x, y) = T(x, y) = Bx + Cy + D$$

dove $B = C$ ancora quando si voglia l'associatività.

Prima di concludere questo numero vale la pena di far osservare che nei casi particolari considerati da Castagnoli, Castagnoli-Muliere, Muliere, Savage, Peccati e nelle loro ipotesi le soluzioni indicate erano le uniche.

8. CONCLUSIONI

Come abbiamo visto, per determinare il nucleo delle trasformate integrali di f.r., una volta specificate ψ e T tutto diviene estremamente semplice e naturale. L'uso frequente in statistica delle trasformate di Laplace-Fourier e di Mellin rientra in questo approccio.

Da quanto detto ci sembra per di più che emerga sia il valore concettuale sia il valore esplicativo delle trasformate integrali ed inoltre è messo in luce il loro legame con le operazioni sulle v.a.

Certamente il presente lavoro non esaurisce le problematiche attinenti all'argomento trattato: pensiamo di ritornare quanto prima su questo tema sia da un punto di vista teorico (questioni di divisibilità, stabilità, dominio di attrazione, problemi di caratterizzazione, ecc.) sia per metterne in luce le possibilità applicative.

Crediamo che possa essere interessante ed utile riprendere la questione ancor più in generale partendo da funzionali delle f.r. anziché da trasformate integrali. In tal caso, detto $\mathcal{F}(G, s)$ un funzionale di una f.r. G dipendente da un parametro s , si dovrebbe studiare, sotto opportune ipotesi, una equazione del tipo:

$$\mathcal{F}(G_{\psi(x, y)}, s) = T(\mathcal{F}(G_X, s), \mathcal{F}(G_Y, s))$$

oppure, in chiave ancor più generale:

$$\mathcal{F}^1(G_{\psi(X, Y)}, s) = T(\mathcal{F}^2(G_X, s), \mathcal{F}^3(G_Y, s))$$

nella quale compaiono tre funzionali eventualmente diversi.

BIBLIOGRAFIA

- ACZÉL, J. (1966). *Lectures on Functional Equations and their Applications*, Academic Press, New York.
- BELOUSOV, V.D. (1968). *Some remarks on the functional equation of generalized distributivity*, Aequationes Math. 1, pp. 54-65.
- BELOUSOV, V.D. e HOSSZU', H. (1965). *Some reduction theorems on the functional equation of generalized distributivity*, Publ. Mat. Debrecen., 12, pp. 175-180.
- CASTAGNOLI, E. (1973/74). *Sulle trasformate delle funzioni di ripartizione di variabili casuali*, Studi e Ricerche, X-XI, pp. 3-13.
- CASTAGNOLI, E. e MULIERE, P. (1984). *Su una equazione funzionale e alcuni problemi di caratterizzazione*, Istituto di Matematica Finanziaria, Univ. di Parma, ser. II, n. 21.
- EPSTEIN, B. (1948). *Some applications of the Mellin Transforms in Statistics*, Annals of Mathematical Statistics, 19, pp. 370-379.
- HILL, T.W. e BUCK, J.R. (1974). *Zeta transforms, present value, and economic analysis*. AIIE Transactions, 6, pp. 120-125.
- HLADIK, J. (1969). *Les Transformations fonctionnelles*, Dunod, Paris.
- HOSSZU', M. (1959). *A generalization of the functional equation of distributivity*, Acta Sci. Math. (Szeged), 20, pp. 67-80.
- KAGAN, A.M., LINNIK, YU V. e RAO, C.R. (1973). *Characterization Problems in Mathematical Statistics*, J. Wiley, New York.
- LUKACS, E. (1963). *Applications of characteristic functions in Statistics*, Sankhya Ser. A., 25, pp. 175-188.
- LUKACS, E. e LAHA, R.G. (1964). *Applications of Characteristic Functions*, Griffin, London.
- LUKACS, E. (1970). *Characteristic Functions*, 2nd. ed. Hafner, New York.
- LUNDBERG, A. (1982). *Generalized distributivity for real, continuous functions. I: Structure theorems and surjective solutions*, Aequationes Math., 24, pp. 74-96.
- LUNDBERG, A. (1985). *Generalized distributivity for real, continuous functions. II. Local solutions in the continuous case*. Aequationes Math., 28, pp. 236-251.
- MANDELBROT, B. (1961). *Stable Paretian random functions and the multiplicative variation of income*, Econometrica, vol. 19, pp. 517-543.
- MULIERE, P. (1984). *Una nota su operazioni associative, trasformate integrali e problemi di caratterizzazione in statistica*, Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali, 7, 1/2, pp. 79-93.

- PECCATI, L. (1975). *Valor medio e operazioni associative*, Studi e Ricerche, XII, pp. 181-194.
- RAMACHANDRAN, B. (1967). *Advanced Theory of Characteristic Functions*, Statistical Publishing Society, Calcutta.
- SAVAGE, L.J. (1971). *The characteristic function characterized and the momentousness of moments*, Studi di Probabilità e Ricerca Operativa in onore di G. Pompilj, Tipografia Oderisi, Gubbio, pp. 131-141.
- SPRINGER, M.D. (1979). *The Algebra of Random Variables*, J. Wiley, New York.
- SPRINGER, M.D. e THOMPSON, W.E. (1967). *Bayesian confidence limits for the reliability of cascade exponential subsystems*, IEEE Transactions on Reliability, v.R-16, pp. 86-89.
- SPRINGER, M.D. e THOMPSON, W.E. (1968). *Bayesian confidence limits for reliability of redundant system when tests are terminated at first failure*, Technometrics, 10, pp. 29-36.
- STEHLING, F. (1978). *The generalized distributivity and associativity equation*, nel volume di EICHORN, W., *Functional Equations in Economics*, (1978), Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Cap. 5.
- STELSON, H.E. (1956). *Laplace transforms applied to Interest functions*, Skandinavisk Aktuarietidskrift, 39, pp. 97-104.
- WEBB, E.L.R. (1965). *On the distribution of the product of diode detector waveforms*, Canadian Journal of Physics, 34, pp. 679-691.

RIASSUNTO

In questo lavoro viene risolto il problema descritto dalla seguente equazione:

$$f_{X \circ Y}^1(s) = f_X^2(s) * f_Y^3(s)$$

dove $\circ$ e $*$ sono due operazioni incognite e f^1, f^2, f^3 sono tre trasformate integrali, pure incognite, di funzioni di ripartizione. Le trasformate integrali così individuate generalizzano casi ben noti in letteratura: funzione caratteristica, trasformata di Mellin, funzione-generatrice dei momenti, ecc.

SUMMARY

In this paper we consider the problem summarized in the following equation:

$$f_{X \circ Y}^1(s) = f_X^2(s) * f_Y^3(s)$$

where $\circ$ and $*$ are two unknown operations and f^1, f^2, f^3 are three unknown integral transforms of distribution functions.

The transforms above obtained generalize well known cases such as characteristic function, Mellin transform, moment generating function and so on.

PAROLE CHIAVE

Equazioni funzionali; trasformate integrali.