STATISTICA, anno XLI, n. 2, 1981

SULL'INVARIANZA DEL RAPPORTO DI CONCENTRAZIONE *R* DI GINI (*)

Pietro Muliere

1. INTRODUZIONE E SOMMARIO

Sono trascorsi oltre sessanta anni di laboriosa ricerca dall'introduzione esplicita della nozione di concentrazione nella letteratura statistica, ad opera di Corrado Gini [1]. Dagli innumerevoli contributi allo studio della concentrazione, dovuti soprattutto ad esponenti della Scuola Statistica Italiana, traspare il consenso pressoché unanime sul concetto di concentrazione mentre non si riscontra concordanza sugli indici da impiegare come misura della stessa. Numerosi sono, infatti, i lavori contenenti proposte di indici e le discussioni sulla loro portata e i limiti di applicabilità; così come elevato è stato il numero degli articoli in cui sono state evidenziate le analogie, sia tra i vari indici di concentrazione, sia tra questi e gli indici di variabilità più classici (tra coloro che sono intervenuti nella discussione ricordiamo, oltre al già citato Gini, V. Amato, C. Bonferroni, V. Castellano, M. De Vergottini, L. Galvani, P. Fortunati, A. Gili, A. Herzel, G. Pietra).

Non è, tuttavia, sugli aspetti concettuali della nozione di concentrazione che qui desideriamo intrattenerci, ma desideriamo indagare su un aspetto particolare riguardante un indice molto noto e largamente impiegato quale il rapporto di concentrazione R di Gini.

Tale indice, pur essendo tra gli innumerevoli indici di disuguaglianza la misura sintetica migliore nell'analisi della distribuzione dei redditi (J. Morgan [2]) e pur essendo sensibile anche a lievi cambiamenti che avvengono nella distribuzione (J.L. Gastwirth [3]) ha suscitato e suscita notevoli discussioni circa il suo effettivo valore come indice descrittivo della concentrazione.

Un elemento di discussione è fornito dalla circostanza che vi sono distribuzioni che possono dar luogo a differenti curve di concentrazione pur avendo lo stesso rapporto di concentrazione R. E' noto, infatti, che data una curva di concentrazione è sempre possibile calcolare il rapporto di concentrazione; viceversa, uno stesso valore di R è compatibile con infinite curve di concentrazione. L'esigenza di specificare R ha indotto alcuni Autori a determinare indici specificativi in modo da stabilire quale forma abbia la curva e quale sia l'incidenza delle differenze sul valore del rapporto di concentrazione. (Per la bibliografia si veda: G. Zanardi [4], J.B. Hagerbaumer [5], A. Patimo [6]).

(*) Ringrazio il Prof. E. Regazzini per avermi suggerito il tema ed il Prof. D.M. Cifarelli per le critiche ed i suggerimenti rivoltimi nel corso del lavoro. La responsabilità per ogni errore o limite è comunque soltanto mia.

Un altro approccio consiste nell'esaminare la banda entro la quale può variare la curva di concentrazione per un fissato valore di R. La barriera inferiore è stata determinata per variabili aleatorie continue da G. Sallustio [7] e da E. Jalla [8]; quella superiore è stata trovata sempre nel caso teorico da G. Sallustio nel lavoro citato. G. Girone [9] ha ricavato invece le spezzate che delimitano inferiormente e superiormente la curva di concentrazione nel caso di un numero finito di osservazioni.

Ricerche sul comportamento del rapporto di concentrazione sono state condotte anche da S. De Simoni [10], [11], il quale ricollegandosi ad uno studio di P. Fortunati [12] ha analizzato il comportamento di R, ottenuto con il metodo geometrico analitico, nell'ipotesi che le modalità quantitative crescenti x_i restino immutate, mentre la successione delle frequenze assolute passi dai valori $N(x_i)$ a valori $N^*(x_i)$. In particolare De Simoni [11], introducendo alcune ipotesi sul rapporto delle funzioni di densità ha esaminato il comportamento di R nel caso in cui la variabile statistica conservi il suo supporto ma vari la corrispondente funzione di densità.

Dell'invarianza del rapporto di concentrazione rispetto ai parametri che caratterizzano la distribuzione si è occupato C. Scala [13], [14].

A tal proposito è appena il caso di ricordare che R è invariante al cambiamento di scala. Ciò in sostanza conduce alla seguente proposizione:
se la densità della variabile X è data dalla funzione

$$f(x, a) = 1/a\, g(x/a) \qquad a > 0$$

allora R non dipende dal parametro di scala a.
Tuttavia R può risultare indipendente dal parametro che compare in una legge di densità anche quando esso non rappresenti un parametro di scala. Questa possibilità può essere illustrata considerando la variabile aleatoria X con funzione di densità:

$$f(x, a) = 1/a\, x \exp(-x^2/2a). \qquad a > 0,\ x \geqslant 0.$$

In tal caso a non è un parametro di scala pur risultando $R = (\sqrt{2} - 1)/\sqrt{2}$. (Si veda F. Luscia [15]).

Non è stato invece toccato, a nostra conoscenza, lo studio della determinazione di eventuali famiglie di funzioni di ripartizioni che lasciano invariato R.

In questa nota ci proponiamo, dopo aver ricordato nel paragrafo 2 alcune definizioni, di determinare, nel paragrafo 3, una di tali famiglie. Nel paragrafo 4 forniremo alcune specificazioni sulla funzione arbitraria da cui tale famiglia dipende. Nel paragrafo 5, infine, presenteremo alcuni esempi.

2. DEFINIZIONI

Detta $F(x)$ la funzione di ripartizione (f.r.), per semplicità strettamente crescente e differenziabile, di una variabile aleatoria X con supporto $[0 + \infty)$, dotata di media (finita), $m > 0$, la curva di concentrazione è definita parametricamente dalle coppie $(F(x), Q(x)), x \geqslant 0$

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t)\, dt & x \geqslant 0 \\ \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$Q(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} \displaystyle\int_0^x t f(t)\, dt & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Posto $p = F(x)$, $x \geqslant 0$ la curva di concentrazione ha equazione:

$$L(p) = \frac{1}{m} \int_0^{F^{-1}(p)} t f(t)\, dt \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1$$

in cui F^{-1} è la funzione inversa di F.
Oppure

$$L(p) = \frac{1}{m} \int_0^p F^{-1}(z)\, dz \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1 \tag{1}$$

E' opportuno notare che dalla (1) e dal fatto che $F^{-1}(z)$ è non decrescente discende che $L(p)$ (curva di Lorenz) è convessa e la sua derivata è uguale ad uno in $p = F(m)$.

Il rapporto di concentrazione di Gini è allora dato da:

$$R = 1 - 2 \int_0^{\infty} Q(x)\, dF(x) = 1 - 2 \int_0^1 L(p)\, dp. \tag{2}$$

Una formula alternativa dell'indice R è basata sulla differenza media, Δ, della f.r. $F(x)$ presa in considerazione.

$$R = \frac{\Delta(F)}{2m}$$

essendo

$$\Delta(F) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |x - y|\, dF(x)\, dF(y)$$
$$= 2 \int_0^{\infty} F(x)(1 - F(x))\, dx.$$

Prima di terminare questo numero presentiamo nella, Tabella 1, l'espressione delle curve di concentrazione di alcune distribuzioni che utilizzeremo negli esempi del paragrafo 5 ed il valore del rapporto di concentrazione R corrispondente.

3. IL RISULTATO

Consideriamo una generica variabile aleatoria unidimensionale X con funzione di ripartizione $F(x)$, dotata di media finita, e una funzione monotòna, crescente e differenziabile $y = \varphi^{-1}(x)$, $(\varphi^{-1}(0) = 0)$.

La domanda che ci poniamo è la seguente: qual è la funzione di trasformazione che permette di determinare la variabile Y in modo da lasciare invariato il rapporto di concentrazione, vale a dire $R_Y = R_X$?

Vale il seguente:

Teorema. *Sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione $F(x)$, dotata di media finita, sia $y = \varphi^{-1}(x)$ una funzione monotòna, crescente e differenziabile al-*

TABELLA 1

Distribuzione	$F(x)$	$L(p)$	$\int_0^1 L(p)\,dp$	R
Uniforme in (a, b)	$\frac{x-a}{b-a}$ $a < x < b$	$\frac{p^2(b-a)+2ap}{b+a}$	$\frac{(b-a)+3a}{3(b+a)}$	$\frac{b-a}{3(b+a)}$
Uniforme in (0,1)	x	p^2	1/3	1/3
Esponenziale	$1-e^{-bx}$ $b > 0;\ x > 0$	$p+(1-p)\log(1-p)$	1/4	1/2
Pareto	$1-(a/x)^{\alpha}$ $x > a > 0$ $\alpha > 1$	$1-(1-p)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$	$\frac{\alpha-1}{2\alpha-1}$	$\frac{1}{2\alpha-1}$

lora la variabile aleatoria Y ottenuta per trasformazione della X che lascia invariato il rapporto di concentrazione R_X è data da:

$$Y = \varphi^{-1}(X) = F^{-1}\left(-\int_0^{F(X)} f(s)\, e^{ks}\, ds\right).$$

F^{-1} indica l'inversa della funzione di ripartizione della variabile X, $k = (\int_0^1 L_X(p)\,dp)^{-1}$ con $k \geqslant 2$, ed $f(s)$ è una funzione arbitraria che soddisfa le condizioni:

i) $f(s) \leqslant 0$ *per ogni $s \in (0,1)$*

ii) $\int_0^1 \frac{1}{k}\,[2(1-s)-k(1-s)^2]\, e^{ks} f(s)\, ds = 0.$

Vediamo uno schema di dimostrazione.

La funzione di ripartizione della variabile $Y = \varphi^{-1}(X)$ è:

$$P\{Y \leqslant y\} = F(\varphi(y)) \overset{\text{def}}{=} \Phi(y).$$

Pertanto la curva di concentrazione della variabile Y avrà equazione:

$$L_Y(p) = \frac{1}{\int_0^1 \Phi^{-1}(y)\, dy} \int_0^p \Phi^{-1}(y)\, dy \tag{3}$$

Affinché le due variabili aleatorie X ed Y abbiano lo stesso rapporto di concentrazione R occorre che le funzioni di concentrazione, per la (2), soddisfino:

$$\int_0^1 L_Y(p)\, dp = \int_0^1 L_X(p)\, dp \tag{4}$$

Posto

$$\int_0^1 L_X(p)\, dp = \frac{1}{k}$$

avremo, per la (3), che deve essere soddisfatta la seguente:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\int_0^1 \Phi^{-1}(y)\, dy} \int_0^p \Phi^{-1}(y)\, dy \right) dp = \frac{1}{k} \tag{5}$$

La (5) è equivalente alla:

$$\int_0^1 \left[k \int_0^p \Phi^{-1}(y)\, dy - \Phi^{-1}(p) \right] dp = 0 \tag{6}$$

ed il problema posto nell'introduzione diviene: determinare la funzione $\Phi^{-1}(p)$ che soddisfa la (6).

Ponendo

$$Q(p) = k \int_0^p \Phi^{-1}(y)\, dy - \Phi^{-1}(p) \tag{7}$$

la (6) equivale a

$$\int_0^1 Q(p)\, dp = 0 \qquad \text{con } Q(0) = 0 \tag{8}$$

Ponendo, inoltre,

$$g(p) = \int_0^p \Phi^{-1}(y)\, dy;$$

si osserva che la (7), essendo $g'(p) = \Phi^{-1}(p)$, diviene:

$$g'(p) = k\, g(p) - Q(p) \tag{9}$$

vale a dire una equazione differenziale lineare del primo ordine dove k è una costante e $Q(p)$ una funzione continua in p.

La soluzione generale dell'equazione (9), essendo $g(0) = 0$, può essere scritta nella forma:

$$g(p) = - \int_0^p Q(t)\, e^{k \int_t^p dt} = - \int_0^p e^{k(p-t)}\, Q(t)\, dt. \tag{10}$$

Allo scopo di ricavare $Q(p)$ deriviamo la (10), e ricordando che $g(p)$ è una funzione crescente, avremo

$$g'(p) = - Q(p) - k \int_0^p e^{k(p-t)}\, Q(t)\, dt \geqslant 0$$

e

$$g''(p) = - Q'(p) - k\, Q(p) - k^2 \int_0^p e^{k(p-t)}\, Q(t)\, dt \geqslant 0.$$

Moltiplicando i membri di quest'ultima espressione per $- e^{-kp}$ otteniamo:

$$-e^{-kp}\, g''(p) = Q'(p)\, e^{-kp} + k\, Q(p)\, e^{-kp} + k^2 \int_0^p e^{-kt}\, Q(t)\, dt \leqslant 0 \tag{11}$$

E' ora agevole constatare che ponendo

$$v(p) = \int_0^p e^{-kt}\, Q(t)\, dt, \tag{12}$$

la (11) assume la forma:

$$v''(p) + 2kv'(p) + k^2\, v(p) \leqslant 0 \tag{13}$$

La (13) può essere scritta come un'equazione lineare non omogenea del secondo ordine

$$v''(p) + 2kv'(p) + k^2\, v(p) = f(p) \tag{14}$$

con $f(p)$ funzione arbitraria non positiva ($f(p) \leqslant 0$, per $p \in (0,1)$).
Come è noto la soluzione dell'equazione non omogenea (14) è data dalla somma di una soluzione particolare qualunque di questa equazione e della soluzione generale dell'equazione omogenea corrispondente:

$$v''(p) + 2kv'(p) + k^2\, v(p) = 0. \tag{15}$$

L'equazione caratteristica dell'equazione (15) è una equazione di secondo grado avente due radici reali e coincidenti; pertanto la soluzione generale della (15) è data da:

$$v(p) = (c_1 + c_2 p)\, e^{-kp} \tag{16}$$

Applicando, ora, il classico metodo di variazione delle costanti arbitrarie cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (14) considerando c_1 e c_2 come funzioni di p. Sostituendo nella (16) le espressioni di c_1 e c_2 ottenute si trova la soluzione generale dell'equazione non omogenea:

$$v(p) = e^{-kp}\, [\bar{c}_1 - \int_0^p p\, f(p)\, e^{kp}\, dp + \bar{c}_2 p + p \int_0^p f(p)\, e^{kp}\, dp] \tag{17}$$

dove $\bar{c}_1$ e $\bar{c}_2$ sono costanti di integrazione.
Ricavando dalla (12) l'espressione di $Q(p)$ e sostituendo in essa l'espressione di $v'(p)$ ottenuta dalla (17) si ha:

$$Q(p) = -k\bar{c}_1 + k \int_0^p t\, f(t)\, e^{kt}\, dt - k\, \bar{c}_2 p - kp \int_0^p f(t)\, e^{kt}\, dt + \bar{c}_2 + \int_0^p f(t)\, e^{kt}\, dt\,. \tag{18}$$

Dalla (6), (9), (10), (12), (17) si perviene a:

$$\Phi^{-1}(p) = -\int_0^p f(t)\, e^{kt}\, dt - \bar{c}_2 \tag{19}$$

ed imponendo che sia soddisfatta la relazione (8) è immediato verificare che:

$$\bar{c}_2 = \frac{2}{k} \int_0^1 dp \int_0^p f(t)\, e^{kt}\, dt - 2 \int_0^1 \Big(\int_0^p dt \int_0^t f(s)\, e^{ks}\, ds \Big)\, dp. \tag{20}$$

Affinché $\Psi^{-1}(0) = 0$ è necessario che sia $\bar{c}_2 = 0$, da cui discende che la funzione arbitraria $f(s)$ deve essere scelta in modo tale che risulti soddisfatta la seguente:

$$\int_0^1 \frac{1}{k}\,[2\,(1-s)-k\,(1-s)^2]\,e^{ks} f\,(s)\,ds = 0.$$

La (19) fornisce:

$$\varphi\,(p) = F\,(-\int_0^p f\,(s)\,e^{ks}\,ds),$$

da cui discende l'asserto del teorema.

Si può osservare a conclusione di questo paragrafo che l'espressione del rapporto di concentrazione R della variabile Y è data da:

$$R_Y = 1 - 2\left[\frac{1}{\int_0^1 (\int_0^p f\,(s)\,e^{ks}\,ds)\,dp} \quad \int_0^1 (\int_0^p dt \int_0^t f\,(s)\,e^{ks}\,ds)\,dp\right]. \tag{21}$$

4. ULTERIORI SPECIFICAZIONI SULLA FUNZIONE ARBITRARIA $f\,(s)$

Il teorema enunciato nel paragrafo precedente risponde in maniera esauriente alla domanda che ci siamo posti. Ci sembra opportuno, tuttavia, affrontare il problema dell'assegnazione di qualche regola per costruire $f\,(s)$ in un ambito più ristretto del necessario imponendo che $f\,(s)$ soddisfi le condizioni del teorema

i) $f\,(s) \leqslant 0$ per ogni $s \in (0,1)$

ii) $\int_0^1 \frac{1}{k}\,[2\,(1-s)-k\,(1-s)^2]\,e^{ks} f\,(s)\,ds = 0$

e che valga la seguente

iii) $f\,(s)$ è differenziabile con $f'\,(s) > 0$.

Indicando con

$$m\,(s) = \frac{1}{k}\,[2\,(1-s)-k\,(1-s)^2]\,e^{ks}, \tag{22}$$

la condizione *ii)* diventa

$$\int_0^1 m\,(s)\,f\,(s)\,ds = 0. \tag{23}$$

Per fornire le specificazioni cercate su $f\,(s)$ si può seguire un procedimento dovuto a S. Gram [16], di porre nella (23)

$$f\,(s) = A\;m\,(s) + H\,(s)$$

dove A è una costante da determinare ed $H\,(s)$ una funzione arbitraria di s, tale che esista

$$\int_0^1 H\,(s)\;m\,(s)\,ds.$$

Seguendo ora, con lieve variazione, lo schema di dimostrazione proposto da F. Giaccardi Giraud [17] e E. Levi [18] e tenendo conto della condizione *iii)* su $f\,(s)$ è agevole verificare che:

$$f(s) = \int_0^s B(z)\, dz - \frac{\int_0^1 B(z)\, dz \int_z^1 m(s)\, ds}{\int_0^1 m(s)\, ds} \tag{24}$$

con $B(z)$ funzione arbitraria positiva.

In conclusione notando che

$$a) \int_0^1 m(s)\, ds = \frac{1}{k}$$

$$b) \int_z^1 m(s)\, ds = \frac{1}{k} e^{kz} (z-1)^2$$

la funzione $f(s)$ è data da:

$$f(s) = \int_0^s B(z)\, dz - \int_0^1 B(z)\, e^{kz} (1-z)^2\, dz \tag{25}$$

Interessa ora vedere quali condizioni debbano imporsi affinché risulti soddisfatta la condizione $i)$ ($f(s) \leqslant 0$ $s \in (0,1)$).

Tale condizione è soddisfatta se $f(1) \leqslant 0$, cioè se

$$\int_0^1 B(z)\, e^{kz} (1-z)^2\, dz \geqslant \int_0^1 B(z)\, dz \tag{26}$$

In conclusione possiamo dire che $f(s)$ può essere definita partendo da una funzione arbitraria positiva $B(z)$ che soddisfi la (26).

5. ALCUNI ESEMPI

Era implicito, in quanto detto nel paragrafo precedente, ma forse vale la pena di dirlo espressamente: conviene scegliere la funzione $B(z)$ che soddisfi la (26) e quindi costruire la $f(s)$ mediante la (25), piuttosto che partire dalla funzione arbitraria $f(s)$ e chiedersi se soddisfa le condizioni $i)$ e $ii)$.

Consideriamo la famiglia di funzioni

$$B(z) = \frac{1}{\Gamma(h)} k^h z^{h-1} e^{-kz} \qquad h > 0;\, z > 0.$$

E' immediato verificare che la condizione (26) è soddisfatta allorché:

$$\frac{2\, k^h}{\Gamma(h+3)} \geqslant \int_0^k \frac{1}{\Gamma(h)} t^{h-1} e^{-t}\, dt \tag{27}$$

L'integrale che compare nella (27) rappresenta la funzione Γ incompleta. Dalle tavole (si veda K. Pearson [19]) si possono dedurre i valori di k che al variare di h soddisfano la (27) (Tabella 2).

La famiglia delle funzioni arbitrarie $f(s)$, ottenuta da $B(z)$, che soddisfa le condizioni $i)$ $ii)$ è data da:

TABELLA 2

h	k
1	2,83
2	3,25
3	3,46
4	3,80
5	4,02
6	4,16
.	.
.	.
.	.

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(h)} \left[\int_0^{ks} t^{h-1} e^{-t} dt - \frac{2 k^h}{h(h+1)(h+2)} \right] \tag{28}$$

Prima di proseguire, ci sembra utile ricordare che le risposte che otterremo sono risposte parziali nel senso che sono condizionate dalla scelta di $B(z)$.

Negli esempi che presentiamo abbiamo posto $h = 1$, pertanto

$$B(z) = k\, e^{-kz}$$

$$f(s) = \frac{3 - k - 3 e^{-ks}}{3} \tag{29}$$

L'inversa della funzione di ripartizione della variabile Y è data da:

$$F^{-1}(\varphi(p)) = \Phi^{-1}(p) = p + \frac{(k-3)(e^{kp}-1)}{3k} \tag{30}$$

pertanto la variabile aleatoria Y ottenuta per trasformazione della variabile X e che lascia invariato il rapporto di concentrazione è:

$$Y = \varphi^{-1}(X) = F^{-1}\left[F(x) + \frac{(k-3)(e^{kF(x)}-1)}{3k} \right] \tag{31}$$

in cui F^{-1} indica l'inversa della funzione di ripartizione della variabile X.

Per le definizioni date nel paragrafo 2 si ha che la curva di concentrazione della variabile Y ha equazione:

$$L_Y(p) = \frac{k^2 p(3p-2) + 2(e^{kp}-1)(k-3) + 6kp}{k^2 + 2(k-3)(e^k - 1) + 6k} \tag{32}$$

Semplici calcoli portano a:

$$R_Y = \frac{k-2}{k}$$

Esempio 1.

Sia X una variabile aleatoria distribuita uniformemente sull'intervallo (a, b). Dalla tabella 1 si deduce

$$k = \frac{3\,(b+a)}{(b-a)+3a}$$

La variabile Y ottenuta per trasformazione della X e che lascia invariato il rapporto di concentrazione è

$$Y = X - \frac{a}{b+a}\left[\exp\left(\frac{3\,(b+a)\,(x-a)}{(b-a)^2+3a\,(b-a)}\right)-1\right]$$

Si può osservare che se X è distribuita uniformemente su $(0,1)$ allora $Y = X$.

Esempio 2.

Sia X una distribuzione esponenziale con funzione di ripartizione

$$F\,(x) = 1 - e^{-bx} \qquad b > 0; x > 0.$$

Dalla tabella 1 si deduce $k = 4$.
Per la (31) si ha:

$$Y = bX + \log\left(\frac{e^{4\,(1-e^{-bx})}-1}{12}\right).$$

L'inversa della funzione di ripartizione della variabile aleatoria Y è fornita dalla (30):

$$\Phi^{-1}\,(p) = p + \frac{e^{4p}-1}{12}$$

da cui si deduce che la curva di concentrazione della Y ha equazione

$$L_Y\,(p) = \frac{24p^2 - 4p + e^{4p} - 1}{19 + e^4}$$

ed $R_Y = 1/2 = R_X$.

Esempio 3.

Sia X una variabile aleatoria distribuita secondo la legge di Pareto con funzione di ripartizione

$$F\,(x) = 1 - (a/x)^{\alpha} \qquad x > a > 0;\ \alpha > 1$$

Essendo il valore di k uguale a:

$$\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}$$

la variabile Y ottenuta come trasformazione della variabile X è data da:

$$Y = X + \left\{\frac{\alpha-2}{3\,(2\alpha-1)}\left[e^{-\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}\left(1-\left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha}\right)}-1\right]\right\}^{-\frac{1}{\alpha}}$$

E' appena il caso di osservare che affinché $f(s)$ sia non positiva α deve essere scelto in modo da ottenere $k > 2{,}83$, vale a dire $1 < \alpha \leqslant 2{,}20$.
L'inversa della funzione di ripartizione della variabile Y è data da:

$$\Phi^{-1}(p) = p - \frac{\alpha - 2}{3(2\alpha - 1)} \, e^{\frac{2\alpha - 1p}{\alpha - 1}} - 1$$

pertanto è immediato dedurre che $R_Y = \dfrac{1}{2\alpha - 1} = R_X$.
Nel caso in cui $\alpha = 2$ allora $Y = X$ ed $\Phi^{-1}(p) = p$ da cui $R_Y = 1/3$.

Istituto di Scienze Economiche e Statistiche
Università degli Studi di Pavia

PIETRO MULIERE

BIBLIOGRAFIA

[1] G. GINI, *Indici di concentrazione e di dipendenza*, in "Atti della S.I.P.S., 1910.
C. GINI, *Variabilità e mutabilità. Contributo allo studio delle distribuzioni e relazioni statistiche*, in "Studi Economico-Giuridici dell'università di Cagliari", III, 1912.
C. GINI, *Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri*, in "Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti", LXXIII, p. II, 1914.
I lavori di C. Gini, integrati da E. Pizzetti e T. Salvemini sono stati raccolti nel I volume delle memorie di metodologia statistica: *Variabilità e concentrazione*, Veschi, Roma, 1955.

[2] J. MORGAN, *The Anatomy of Income Distribution*, "The Review of Economics and Statistics", 44, pp. 270-283, 1962.

[3] J.L. GASTWIRTH, *The Estimation of the Lorenz Curve and Gini index*, The Review of Economics and Statistics, 54, pp. 306-316, 1972.

[4] G. ZANARDI, *L'asimmetria statistica delle curve di concentrazione*, Ricerche Economiche 19, pp. 355-396, 1965.

[5] J.B. HAGERBAUMER, *The Gini concentration ratio and the minor concentration ratio: a two parameter index of inequality*, The Review of Economics and Statistics, 59, pp. 377-379, 1977.

[6] A. PATIMO, *Dall'indice specificativo del rapporto di concentrazione ad un indice di asimmetria della curva di concentrazione*, Atti della Riunione Scientifica della S.I.S., 29, 2, 1, pp. 177-187, 1978.

[7] G. SALLUSTIO, *Disuguaglianze non parametriche tra gli indici di concentrazione R e δ di Gini*, Annali dell'Istituto di Statistica dell'università di Bari, 36, pp. 87-99, 1971-1972.

[8] E. JALLA, *Entropia e curva di concentrazione*, Atti della Riunione Scientifica della S.I.S., 29, 2, 1, pp. 137-148, 1978.

[9] G. GIRONE, *Barriere inferiore e superiore per la curva di concentrazione dato il rapporto di concentrazione*, Annali dell'Istituto di Statistica dell'università di Bari, 37, pp. 33-40, 1972-1973.

[10] S. DE SIMONI, *Alcuni sviluppi sul rapporto di concentrazione*, Statistica, 2, pp. 423-450, 1966.

[11] S. DE SIMONI, *Alcune considerazioni sul rapporto di concentrazione nel caso di una variabile statistica continua*, Statistica, 4, pp. 783-802, 1966.

[12] P. FORTUNATI, *Alcune considerazioni sul rapporto di concentrazione*, in Scritti di Economia e Statistica in memoria di A. Molinari, Milano, Giuffrè, 1963.

[13] C. SCALA, *Su un caso di inerzia del rapporto di concentrazione di Gini-Lorenz*, in Quaderni dell'Istituto di Statistica, Università degli Studi di Siena, 2, 1972.

[14] C. SCALA, *Some cases of invariance of the concentration ratio*, in Quaderni dell'Istituto di Statistica, Università degli Studi di Siena, 3, 1972.

[15] F. LUSCIA, *Qualche considerazione intorno ad un indice di concentrazione*, Giornale degli Economisti e Annali di Economia, XXXVII N.S., 7-8, pp. 469-477, 1978.

[16] S. GRAM, *Ueber die Entwickelung reeller Function in reihen mittelst der Methode der Kleinsten Quadrate*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 94, 1883.

[17] F. GIACCARDI GIRAUD, *Di un criterio per l'applicazione dell'imposta progressiva sul reddito*, Giornale di Matematica Finanziaria, Anno XXII, Serie III, vol. X, N. 2-3, 1940.

[18] E. LEVI, *Sulla determinazione delle funzioni di imposta che assicurano un determinato gettito globale e soddisfano a date condizioni.* Quaderni dell'Istituto di Mat. Fin. Univ. Torino, 1951.

[19] K. PEARSON, *Tables of the Incomplete Γ function*, Biometrika, London, 1922.

SUMMARY

On the invariance of Gini's concentration ratio R

Let X be a random variable with distribution function $F(x)$ and a given value of Gini's concentration ratio, R_X. Let $y = \varphi^{-1}(x)$ be a monotonic, increasing and differentiable function. The problem is to find the random variable Y, function of X, such that the concentration ratio of Y is equal to R_X, that is $R_X = R_Y$.

In this paper the Author derives a family of distributions having a given value of Gini's concentration ratio.

Some conditions on the arbitrary function upon which the family of distributions depends are determined.

Some examples of distributions families generated by several common distributions (uniform, exponential, Pareto distribution) are also examined.

RÉSUMÉ

Sur l'invariance du rapport de concentration R de Gini

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est $F(x)$ et soit R_X la valeur du rapport de concentration de Gini. On considère une fonction monotone, croissante et differentiable $y = \varphi^{-1}(x)$ et on pose le problème de connaître la variable Y, fonction de la variable aléatoire X, de façon que le rapport de concentration de Y soit égal à R_X, c'est-a-dire $R_X = R_Y$.

Dans cette note l'Auteur a determiné une famille des fonctions de répartition qui ont la valeur donnée du rapport de concentration R de Gini.

L'Auteur a établi aussi des conditions de la fonction arbitraire la quelle détermine la famille des fonctions de répartitions. A ce propos il a examiné quelques exemples générés par la loi uniforme, la loi exponentielle et la loi de Pareto.